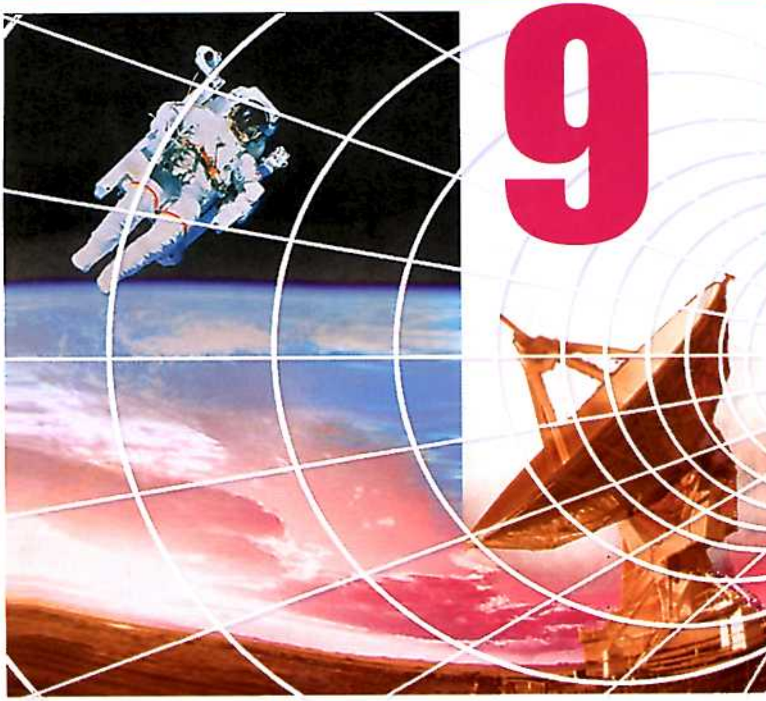
А. Г. Мордкович, П. В. Семенов

Алгебра

9



Методическое пособие для учителя

Издательство Мнемозина

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов

Алгебра

9 класс

Методическое пособие для учителя

Издательство Мнемозина

Москва 2010

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
М79

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра. 9 класс : методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : Мнемозина, 2010. — 72 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01403-4

В пособии представлено примерное планирование учебного материала в 9 классе, разъясняются важнейшие особенности учебника А. Г. Мордковича, П. С. Семенова «Алгебра –9» (М. : Мнемозина). Пособие содержит также решение трудных задач из задачника «Алгебра– 9».

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович

АЛГЕБРА

9 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *В. Ю. Фотиева*
Корректоры *Т. В. Пекичева, И. Н. Баханова*
Компьютерная верстка и графика: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.
Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,5.
Тираж 5000 экз. Заказ № 577.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел.: 8(499)3675418, 3675627, 3676781; факс: 8(499)1659218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел./факс: 8(495)7838284; тел.: 8(495)7838285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8(495)6656031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ООО «Финтрекс».
115477, Москва, ул. Кантемировская, 60.

ISBN 978-5-346-01403-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Начиная с 2008 года издательство «Мнемозина» публикует переработанный вариант учебного комплекта для изучения курса алгебры в 9 классе:

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

А. Г. Мордкович и др. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник.

Этот комплект отличается от издававшегося в 1998—2007 годах: во-первых, несколько изменился порядок изучения параграфов; во-вторых, сделаны редакционные и содержательные изменения внутри отдельных параграфов учебника и задачника.

В чем состоят принципиальные отличия этого издания учебника от всех предыдущих?

1. Снята глава 5 «Элементы теории тригонометрических функций» (в соответствии с действующим стандартом этот материал изучается теперь в старшей школе), вместо нее появилась глава «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей». В первую главу («Рациональные неравенства и их системы») включен материал о языке теории множеств.

2. Снят § 13 «Как построить график функции $y = mf(x)$, если известен график функции $y = f(x)$» (этот материал также перенесен в старшую школу), вместо него появился параграф «Функция $y = \sqrt[3]{x}$, ее свойства и график».

3. Существенные изменения претерпел § 5, открывавший главу 2 «Системы уравнений». Теперь он состоит из пяти пунктов:

п. 1. «Рациональные уравнения с двумя переменными». Здесь, в частности, упоминаются диофантовы уравнения и приводятся соответствующие примеры.

п. 2. «График уравнения с двумя переменными».

п. 3. «Формула расстояния между двумя точками координатной плоскости. График уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$». Этот материал содержался и в предыдущих изданиях, но доказательств не было — можно было сослаться на курс геометрии. Действующим стандартом соответствующие доказательства отнесены к курсу алгебры.

п. 4. «Системы уравнений с двумя переменными». Здесь содержится традиционный материал.

п. 5. «Неравенства и системы неравенств с двумя переменными». Это — новый материал, предусмотренный стандартом.

4. В § 17, посвященном геометрической прогрессии, к имеющимся четырем пунктам добавлен п. 5. «Прогрессии и банковские расчеты». В нем речь идет о простых и сложных процентах.

Цель данного пособия — оказать методическую помощь учителям математики, использующим указанный переработанный комплект в своей педагогической деятельности.

Первая часть пособия содержит методические рекомендации по всем темам (главам) учебника «Алгебра—9». Содержание этих рекомендаций внутри тем не унифицировано. Оно зависит, естественно, от важности и трудности темы, степени ее методической новизны. Для традиционных тем мы ограничиваемся отдельными методическими замечаниями и советами. В других случаях разговор идет на более серьезном методическом и психолого-педагогическом уровнях. Во второй части содержится решение ряда упражнений повышенной сложности из задачника «Алгебра—9» (упражнений, которые помечены в задачнике значком ●).

В пособии приводится примерное планирование курса алгебры 9 класса.

Авторы

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА В 9 КЛАССЕ (3 ч в неделю[1], всего 102 ч в год)

Повторение материала 7—8 классов	—(4)
Глава 1. НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ (16 ч)	
1. Линейные и квадратные неравенства (повторение)	3 (3)
2. Рациональные неравенства	5 (5)
3. Множества и операции над ними	3 (4)
4. Системы рациональных неравенств	4 (5)
Контрольная работа № 1	1 (1)
Глава 2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (15 ч)	
5. Основные понятия	4 (6)
6. Методы решения систем уравнений	5 (6)

[1] В скобках указано количество уроков из расчета 4 ч в неделю.

7.	Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций (текстовые задачи)	5 (8)
	Контрольная работа № 2	1 (1)

Глава 3. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ (25 ч)

8.	Определение числовой функции. Область определения, область значений функции	4 (5)
9.	Способы задания функции	2 (3)
10.	Свойства функций	4 (5)
11.	Четные и нечетные функции	3 (3)
	Контрольная работа № 3	1 (1)
12.	Функции $y = x^n$, $n \in N$, их свойства и графики	4 (4)
13.	Функции $y = x^{\;n}$, $n \in N$, их свойства и графики	3 (4)
14.	Функции $y = \sqrt[3]{x}$, ее свойства и графики	3 (3)
	Контрольная работа № 4	1 (1)

Глава 4. ПРОГРЕССИИ (16 ч)

15.	Числовые последовательности	4 (6)
16.	Арифметическая прогрессия	5 (7)
17.	Геометрическая прогрессия	6 (8)
	Контрольная работа № 5	1 (1)

Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (12 ч)

18.	Комбинаторные задачи	3 (5)
19.	Статистика — дизайн информации	3 (5)
20.	Простейшие вероятностные задачи	3 (5)
21.	Экспериментальные данные и вероятности событий	2 (4)
	Контрольная работа № 6	1 (1)
	Обобщающее повторение	17 (21)
	Итоговая контрольная работа	1 (1)

Часть 1

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ С УЧЕБНИКОМ

Тема 1

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

§ 1, посвященный линейным и квадратным неравенствам с одной переменной, носит явно повторительный характер. Напоминаются известные школьникам из курса 8 класса понятия линейного и квадратного неравенства, решения неравенства, равносильного преобразования неравенства. По сравнению с курсом алгебры 8 класса продвижение вперед намечено лишь по двум направлениям.

1) Говорится об обобщении правил умножения или деления обеих частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число (в 8 классе этого не было):

если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, положительное при всех значениях x, и сохранить знак исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное данному;

если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, отрицательное при всех значениях x, и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Например, неравенство $(2x + 1)(x^2 + 2) > 0$ равносильно неравенству $2x + 1 > 0$: обе части исходного неравенства разделили на выражение $x^2 + 2$, положительное при любых значениях x; при этом знак исходного неравенства оставили без изменения.

Неравенство $\frac{3x - 4}{-x^4 - 1} > 0$ равносильно неравенству $3x - 4 < 0$: обе части исходного неравенства умножили на выражение $-x^4 - 1$, отрицательное при любых значениях x; при этом знак исходного неравенства изменили.

2) Если в курсе алгебры 8 класса рассматривались неравенства с модулями вида $|x - a| < c$, то теперь в задачнике встречаются и неравенства вида $|ax + b| < c$.

Пример (№ 1.22. а)). Решить неравенство

$$|4x + 3| > 5.$$

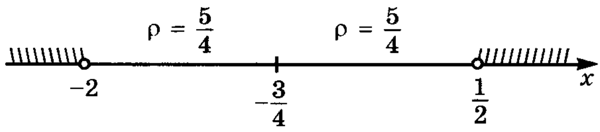


Рис. 1

Решение. Имеем:

$$4\left|x + \frac{3}{4}\right| > 5; \quad \left|x + \frac{3}{4}\right| > \frac{5}{4}.$$

А далее применяем прием, известный учащимся из курса алгебры 8 класса: нам надо найти на числовой прямой все такие точки, которые удалены от точки $\left(-\frac{3}{4}\right)$ более чем на $\frac{5}{4}$. Получаем (рис. 1): $x < -2$; $x > \frac{1}{2}$.

В § 2 речь идет о решении рациональных неравенств методом интервалов. Обратите внимание на три обстоятельства.

1) Не стоит торопиться с введением механической «кривой знаков», более важно, чтобы ваши учащиеся усвоили идею сохранения знака рациональной функции на интервалах между ее нулями (корнями числителя) и полюсами (корнями знаменателя) и научились устанавливать эти знаки методом пробных точек. Упоминание о кривой знаков появляется в учебнике только после примера 4. На наш взгляд, нецелесообразно формализовать ситуацию до тех пор, пока у обучаемых не накопится некоторый содержательный опыт. Что касается метода пробных точек, то после рассмотрения двух-трех примеров общих рассуждений (см. примеры 1—3 из § 2) в случае необходимости можно использовать для определения знака выражения на том или ином промежутке не абстрактную точку из промежутка, а вполне конкретное значение.

2) Кривая знаков используется в учебнике только для определения знаков функции вида

$$y = \frac{(x - a)(x - b) \cdot \ldots \cdot (x - c)}{(x - b)(x - m) \cdot \ldots \cdot (x - r)},$$

где все множители попарно различны.

Мы неслучайно не использовали в примере 6, где требуется решить неравенство $(x - 1)^2(x + 2) < 0$, известный прием «двойных точек» для построения кривой знаков (рис. 2), усердно пропагандируемый в разных пособиях для поступающих в вузы, поскольку, повторимся, считаем, что в теме «Решение рациональных неравенств» овладение самой идеей знакопостоянства функции важнее овладения рутинной механической технологией

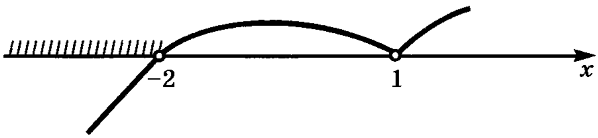


Рис. 2

решения неравенств. В сильном классе можно показать детям этот прием, но не в начале, а в конце изучения темы.

3) Советуем вам не применять со своими учениками метод интервалов для решения квадратных неравенств (кроме «напрашивающихся» на метод интервалов неравенств типа $(x - a)(x - b) < 0$). Опять-таки с идейной точки зрения более значим тот прием решения квадратного неравенства, который использовался в курсе алгебры 8 класса и который мы напомнили в **§ 1**, а в этом параграфе использовали в примере 8.

Пример. Решить неравенство $3x^2 - 2x - 2 < 0$.

Решение. Найдем корни квадратного уравнения $3x^2 - 2x - 2 = 0$:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}.$$

Отметим корни x_1 и x_2 на числовой прямой и построим (схематически) параболу $y = 3x^2 - 2x - 2$; главное — учесть, что ветви этой параболы направлены вверх (рис. 3). Выбираем промежуток, на котором парабола расположена под осью x, — это интервал $(x_2; x_1)$. Он и служит решением заданного неравенства.

Использование же метода интервалов потребовало бы от нас в этом примере разложения на множители заданного квадратного трехчлена с «плохими» корнями; это разложение имеет весьма непрезентабельный вид:

$$3\left(x - \frac{1 - \sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right).$$

Его не слишком приятно записывать, не слишком приятно использовать, а главное, в нем нет никакой необходимости.

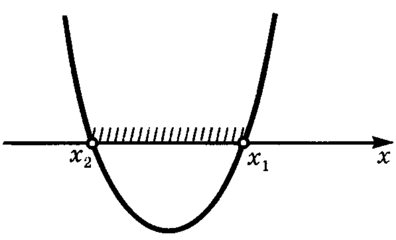


Рис. 3

Материал **§ 3** «Множества и операции над ними» в той или иной мере знаком вашим ученикам. Подчеркиваем, что никакая теория множеств тут не рассматривается. Основной акцент делается на те понятия, которые непосредственно нужны для курса алгебры, для записи ответов при решении различных уравнений и неравенств. Поэтому отрабатываются в первую очередь понятие принадлежности элемента множеству, способы перечисления элементов множества, разные способы описания множеств. Конечно же, появляются объединения и пересечения множеств, но изложение ограничивается операциями над конкретными числовыми множествами. Другими словами, абстрактные свойства вроде $A \cup B = B \cup A$ или $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ни в какой мере не рассматриваются, потому что привести примеры их конкретного использования в курсе алгебры довольно затруднительно, т. е. они не слишком нужны в конкретной практике преподавания. Заметное число примеров в учебнике и упражнений в задачнике, по существу, являются пропедевтикой комбинаторных задач.

В § 4 речь идет о решении систем неравенств. В первых двух примерах этого параграфа рассмотрены задачи, выводящие на новую математическую модель — систему неравенств, ставящие проблему, решению которой посвящен параграф. Проблемный подход уже привычен учащимся, они не раз встречались с ним и в курсе алгебры 7 класса, и в курсе алгебры 8 класса. Естественно, что эти примеры в начале параграфа не могут быть решены, они решаются позднее (один в середине, другой в конце параграфа).

Для решения систем неравенств в учебнике применяется «метод штриховок». У многих учителей более популярен «метод крыш». Рассмотрим оба метода, взяв пример из учебника.

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0, \\ 5x - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение (конспективно). На рис. 4 представлена геометрическая иллюстрация решения первого неравенства системы. На рис. 5 представлена геометрическая иллюстрация решения второго неравенства системы. Отметим найденные решения первого

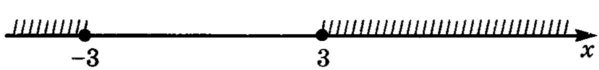


Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

и второго неравенств системы на одной координатной прямой, использовав для решений первого неравенства верхнюю штриховку, а для решения второго — нижнюю штриховку (рис. 6). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы, т. е. промежуток, на котором обе штриховки совпали. Таким промежутком является отрезок [3; 5].

При применении «метода крыш» соответствующие геометрические иллюстрации выглядят так, как показано на рис. 7—9. В принципе вы вольны выбрать тот метод, который вам больше нравится. На наш взгляд, при решении систем, состоящих из двух неравенств, удобнее пользоваться штриховками, если же в системе содержится более двух неравенств, то удобнее применить «метод крыш». В курсе алгебры 9 класса встречаются только системы двух неравенств, первая встреча с системой из трех неравенств состоится в 11 классе, в теме «Логарифмические неравенства».

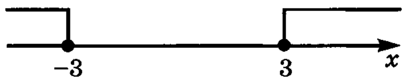


Рис. 7

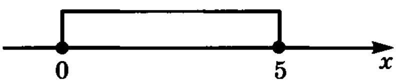


Рис. 8

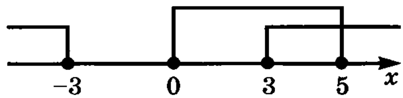


Рис. 9

Обратите внимание: в учебнике не рассматривается случай, когда одно из неравенств системы является следствием другого. Как известно, в таком случае систему неравенств можно не решать, можно отбросить неравенство-следствие. Соответствующий разговор имеет место в нашем учебнике «Алгебра и начала математического анализа, 10—11».

Тема 2

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В § 5 вводится понятие уравнения с двумя переменными и его решения (первые представления об этих понятиях у учащихся имеются: в 7 классе они изучали линейное уравнение с двумя переменными). Выводится уравнение окружности радиусом r с центром в точке $(a; b)$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Почему этот материал помещен именно здесь? Вы уже, наверное, привыкли к тому, что и в учебнике для 7 класса, и в учебнике для 8 класса, начиная говорить о методах решения уравнений или систем уравнений, мы всегда первым упоминаем графический метод. Тому есть несколько причин: во-первых, графический метод является непосредственным олицетворением ведущей линии нашего курса — функционально-графической линии; во-вторых, графический метод культурен и эстетичен; в-третьих, графический метод ненадежен и, следовательно, создает проблемную ситуацию, требующую для своего разрешения получения точных алгоритмов решения уравнений или систем уравнений. Естественно, что в первом параграфе, посвященном системам уравнений, графический метод решения — основной (и единственный), а тогда уравнение окружности гармонично вписывается в систему упражнений. Один совет: не забывайте тезис о равноправии аналитической и графической моделей. Иными словами, предусмотрите в системе заданий своим ученикам переход от уравнения $(x - a)^2 + (x - b) = r^2$ к изображению окружности на координатной плоскости и обратный переход от заданной на координатной плоскости окружности к ее уравнению (такие упражнения есть в задачнике).

По сравнению с предыдущими изданиями учебника для 9 класса (1999—2007) в новом издании произошли существенные изменения, о них подробно сказано в предисловии. Так, в **§ 5** появились неопределенные (диофантовы) уравнения. Если примеры 2 и 3 входят в обязательный для изучения материал, то рассматривать ли остальной текст, данный в учебнике (примеры 4—6), решать учителю. В главе 2 настоящего пособия приведены решения соответствующих уравнений из задачника.

Содержание **§ 6** — метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных — достаточно традиционно, хотя и не тождественно в методическом плане привычным способам подачи материала. Пока мы ограничиваемся перечисленными методами решения систем уравнений, откладывая до лучших времен знакомство с более тонкими методами. Например, с методом деления мы достаточно мягко познакомим учащихся в главе 4, когда речь пойдет о решении задач на геометрическую прогрессию.

В **§ 7** речь идет о решении текстовых задач. Подобные задачи встречались и в курсе алгебры 7—8 классов. Здесь добавляется лишь один тип задач — пресловутые задачи «на работу» и «бассейны». Идеология решения задач не претерпевает изменений: оформление решения по-прежнему осуществляется в виде трех этапов математического моделирования. Особое внимание советуем обратить на замечание к примеру 1 из **§ 7**, в котором обсуждаются два подхода к решению следующей задачи.

В райцентре два кинотеатра: «Факел» и «Слава», первый на 400, а второй на 600 мест. В зрительном зале кинотеатра «Слава» на 4 ряда больше, чем в зрительном зале кинотеатра «Факел», и, кроме того, в каждом ряду мест на 5 больше, чем в кинотеатре «Факел». Сколько рядов в зрительном зале кинотеатра «Факел», если известно, что в каждом ряду кинотеатра «Слава» более 25 мест?

Первый подход привел к системе двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} xy = 400, \\ (x + 4)(y + 5) = 600. \end{cases}$$

В замечании упоминается второй подход, использованный ранее в учебнике для 8 класса: можно было составить математическую модель, содержащую только одну переменную. Если за x принять число рядов в кинотеатре «Факел», то получим уравнение

$$\frac{600}{x+4} - \frac{400}{x} = 5.$$

Сравним два варианта решения задачи. В первом варианте была более сложная математическая модель, значит, более трудным был второй этап — этап работы с составленной моделью. Зато менее сложным был первый этап, сама математическая модель была составлена легче и быстрее. Поскольку объективно первый этап — этап составления математической модели — сложнее (на этом этапе выполняется творческая работа), чем второй — этап решения модели (на этом этапе выполняется техническая работа — работа по готовым алгоритмам), — то более целесообразно упрощать именно первый этап, т. е. работать с двумя переменными. Советуем вам при решении в классе текстовых задач обсуждать с учащимися в соответствующих случаях упомянутую проблему выбора модели.

Для достаточно сложных текстовых задач на этапе формализации (т. е. на этапе составления математической модели) иногда полезно строить промежуточные геометрические модели. Многие учителя пользуются вспомогательными чертежами при составлении аналитической модели (уравнения, системы уравнений), мы же предлагаем в русле общей идеологии называть эти чертежи промежуточными моделями. Скажем, для рассмотренной выше задачи о двух кинотеатрах весьма наглядная геометрическая модель представлена на рис. 10.

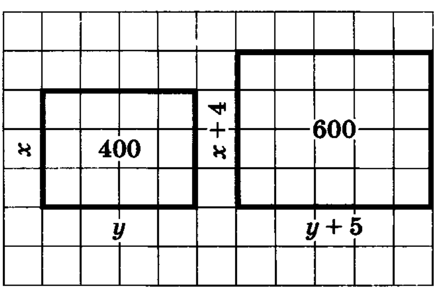


Рис. 10

Завершая разговор о § 7, приведем пример оптимального, на наш взгляд, оформления решения текстовой задачи.

Пример. Из двух городов, расстояние между которыми 700 км, одновременно навстречу друг другу отправляются два поезда и встречаются через 5 ч. Если второй поезд отправится на 7 ч раньше первого, то они встретятся через 2 ч после отправления первого поезда. Найти скорость каждого поезда.

Решение. 1. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — скорость первого поезда, а y км/ч — скорость второго. Первый поезд выходит из города A, второй — из города B, встречаются они через 5 ч в пункте C. До встречи первый прошел путь $5x$ км, второй — $5y$ км. Геометрическая модель ситуации представлена на рис. 11, а аналитическая модель ситуации такова:

$$5x + 5y = 700.$$

Если второй поезд выйдет на 7 ч раньше первого, то до встречи он будет находиться в пути 9 ч, а первый поезд — 2 ч. Встреча произойдет в пункте D. Геометрическая модель ситуации представлена на рис. 12, а аналитическая модель ситуации такова:

$$2x + 9y = 700.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 5y = 700, \\ 2x + 9y = 700. \end{cases}$$

2. *Решение составленной модели.*

Решив систему (решение мы здесь опускаем), получим $x = 80$, $y = 60$.

3. *Ответ на вопрос задачи.*

Нужно найти скорости поездов, которые мы обозначили x и y. Значит, скорость первого поезда 80 км/ч, а скорость второго — 60 км/ч.

Решение неравенств и систем неравенств, решение систем уравнений и задач, сводящихся к системам уравнений, требует постоянного тренинга. Поэтому примите совет: в процессе изучения главы 3 «Числовые функции» постоянно включайте в систему упражнений в классе и для домашних заданий упражнения из первых двух глав задачника.

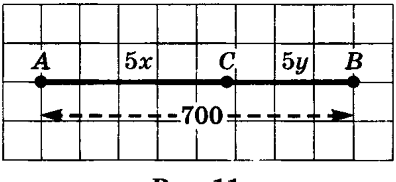


Рис. 11

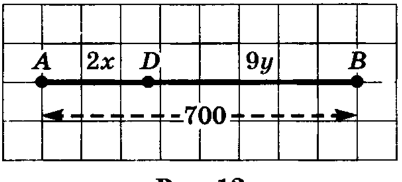


Рис. 12

Тема 3

ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Ключевое значение в этой теме, а может быть, и во всем школьном курсе алгебры имеют **§ 8—10**, где, проанализировав накопленный учащимися *опыт* в использовании понятия функции и в работе со свойствами функции в курсе алгебры 7—8 классов, мы убеждаем учеников в том, что у них появилась и *потребность* в формальном определении понятия функции и соответствующих свойств функции (обратите внимание на слова «опыт» и «потребность»).

Содержание § 8 можно довести до учащихся на уроке в лекционной форме, но, на наш взгляд, предпочтительнее другая форма работы: до урока предложить учащимся в качестве домашнего задания прочитать материал параграфа, а затем в классе на уроке обсудить прочитанное в жанре беседы. Главное в § 8 — выделение двух обстоятельств, подводящих к определению функции (область определения и правило соответствия), и само определение функции. Обратите внимание на то, что в определении 1 (определение функции $y = f(x)$, $x \in X$) мы, говоря, что переменную x называют независимой переменной или аргументом, а переменную y — зависимой переменной, избегаем для y традиционного добавления «или функцией». На первых порах изучения функции советуем вам не отождествлять саму функцию — правило соответствия — и значение функции.

В многочисленных пособиях для средней школы встречается словосочетание «функция $f(x)$». Этот жаргон, понятный математикам, вреден, на наш взгляд, для правильного формирования у учащихся понятия функции. В учебнике написано: «Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X; пишут $y = f(x)$, $x \in X$». В определении подчеркивается, что, говоря о функции, надо одновременно использовать две переменные: x и y. Они же впоследствии указывают обозначения для координатной плоскости, на которой строится график функции. Наша точка зрения, выдержанная во всех наших учебниках и задачниках: $f(x)$ — это выражение с переменной, а не функция; функция всюду обозначается $y = f(x)$.

Коль скоро мы заговорили о принятых обозначениях, упомянем еще два: с нашей точки зрения, для обозначения области определения и области значений функции целесообразнее использовать символы $D(f)$ и $E(f)$, а не $D(y)$ и $E(y)$.

Обратите также внимание на то, что в нашем курсе, в отличие от традиционных школьных подходов, акцент сделан на *заданную*, а не на *естественную* область определения функции. Эта линия проводится, по сути дела, с 7 класса, особенно в кусочных функциях. В традиционных курсах учащиеся в большинстве случаев работают с естественной областью определения, для них привычна запись «функция $y = 3x + 2$» и вызывает удивление запись $y = 3x + 2$, $x \in [1; 3]$. Они считают, что это одна и та же функция, но заданная на различных промежутках. Нужно приучать их к тому, что это — разные функции, поскольку определение функции включает в себя две позиции: *область определения* и *правило соответствия*.

В § 8 вводится понятие области значений функции, причем на первый план выдвигается графический прием отыскания области значений — с помощью построенного графика функции. Разумеется, это не основной путь в математике, но на первых порах уместна опора на наглядность. И, конечно, вы понимаете, что в классе в качестве первого примера использования графика функции для отыскания области ее значений должен фигурировать более простой пример, чем дан в учебнике (кусочная функция, состоящая из трех ветвей); например, найти $E(f)$ для функции $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

В § 10, 11 мы приходим к следующему порядку перечисления свойств функции при чтении ее графика:

1) область определения;
2) четность;
3) монотонность;
4) ограниченность снизу, сверху;
5) $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$;
6) непрерывность;
7) область значений;
8) выпуклость.

Почему выбран именно такой порядок кодов? Дело в том, что первые пять свойств «легитимны», в 9 классе есть их формальные определения и, в принципе, любое из этих пяти свойств можно достаточно строго обосновать. А далее (позиции 6—8) мы снижаем уровень (по понятным причинам), нарушаем традиционный для математики путь «от свойств функции к ее графику», вынуждены идти в обратном направлении — «от графика функции к ее свойствам».

Вопреки сложившейся традиции, давая определение четной и нечетной функции, мы не включаем в него требование симметричности области определения. В определении оно лишнее, это, по сути дела, необходимое условие четной и нечетной функций.

В нашем курсе алгебры, повторим еще раз, одинаково значимы аналитические и геометрические модели. Поэтому вполне естественно, что появляется геометрическая интерпретация четности или нечетности функции, связанная с симметричностью ее графика. Скажем, делать вывод о четности функции $y = \sqrt{9 - x^2}$, на наш взгляд, предпочтительнее по графику (где осевая симметрия полуокружности относительно оси y очевидна), а не ссылаясь на формальное определение.

Хотим обратить ваше внимание на одно принципиальное обстоятельство, которое впервые в нашем курсе алгебры используется именно здесь, в § 11. Речь идет о неявном приобщении школьников к законам формальной логики, согласно которым отрицание утверждения, содержащего квантор общности, приводит к утверждению, содержащему квантор существования, и обратно. Устанавливая факт четности или нечетности функции, нужно проверить, что равенство $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$ выполняется *для всех* значений x. Устанавливая же факт отсутствия как четности, так и нечетности, достаточно показать, что *существует хотя бы одно* x, для которого $f(-x) \neq f(x)$, и хотя бы одно x, для которого $f(-x) \neq -f(x)$.

В § 12, 13 рассматриваются степенные функции с целым показателем. Материал сравнительно несложный, но следует отметить, что он не входит в обязательную программу 9 класса. Почему же мы сочли полезным включить его в главу о числовых функциях? Если бы этого материала не было, то, выйдя на формальный уровень в определении функции и ее свойств и наведя порядок в наших представлениях об изученных ранее функциях, мы были бы вынуждены этим ограничиться. Следовательно, новые знания применялись бы только к уже известным функциям и не использовались бы в новых ситуациях, что неестественно для нормального построения учебного процесса.

Тема 4

ПРОГРЕССИИ

Прежде всего отметим, что, на наш взгляд, в курсе алгебры 9 класса следовало бы обойтись без изучения числовых последовательностей и прогрессий. По большому счету тема «Прогрессии» в 9 классе тупиковая, не имеющая связей с остальным материалом основной школы, а тупиковых тем в разумно и логично выстроенной программе быть не должно. «Последовательности» — тема математического анализа, и было бы логичнее начинать с нее изучение начал математического анализа в 10 классе. А прогрессии — частные случаи последовательностей, искусственно вырывать их из общей темы в принципе нецелесообразно.

Но, увы, в стандарте математического образования тема «Прогрессии» представлена в рамках основной школы, значит, мы обязаны ее рассматривать в курсе алгебры 9 класса, позаботившись о том, чтобы эта тема была органично связана с предыдущими разделами курса, не была тупиковой. Поскольку в нашем курсе приоритет отдается функциональной линии, то и последовательности подаются в том же ключе. Это функции, но несколько отличающиеся от того, к чему привыкли ученики: это функции натурального аргумента.

В **§ 15** на первый план выходит проблема мотивации: надо ли рассматривать функции натурального аргумента? Оказывается, что они уже ранее встречались даже в курсе алгебры 7 класса. И мы приходим к выводу: функции, заданные на множестве натуральных чисел ($y = f(x)$, $x \in N$), нужно изучать.

Все, что сказано в учебнике далее, — это текст для воспроизведения на уроке. Приведем его здесь еще раз (в вольном пересказе).

Математики как-то задумались: зачем писать $y = f(x)$, $x \in N$, не проще ли в таких случаях писать $y = f(n)$, договорившись раз и навсегда подразумевать в этой записи, что аргумент n — натуральное число ($n \in N$). Так и сделали: например, вместо записи $y = x^2$, $x \in N$, решили использовать запись $y = n^2$.

И еще об одном обстоятельстве они договорились: вместо $f(1)$ писать y_1, вместо $f(2)$ — y_2, вместо $f(3)$ — y_3 и т. д., вместо $f(n)$, соответственно, договорились писать y_n.

Значения функции $y = f(n)$ можно записать последовательно одно за другим: $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ..., $f(n)$, ... — или в соответствии с указанной выше договоренностью: y_1, y_2, y_3, y_n, ... Например, для функции $y = n^2$ имеем: $y_1 = 1$; $y_2 = 4$; $y_3 = 9$; .... Полученные значения можно записать последовательно одно за другим:

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots.$$

Важно довести до сознания ваших учеников, что три математические модели:

1) $y = f(x)$, $x \in N$;

2) $y = f(n)$;

3) $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$ или $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_n$, где $y_n = f(n)$, различны по форме, но одинаковы по содержанию.

В **§ 15**, кроме определения числовой последовательности и разных примеров последовательностей, речь идет о трех способах задания последовательности (аналитическом, словесном и рекуррентном) и о свойстве монотонности применительно к последовательностям. Заметим, что тема «Последовательности» в нашем курсе будет иметь продолжение: в 10 классе будет добавлено свойство ограниченности последовательности, изучено понятие предела последовательности (все это будет затем использоваться при изучении показательной функции, точнее, при изучении понятия степени с иррациональным показателем) и понятие суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Материал двух следующих параграфов, в которых рассматриваются арифметическая и геометрическая прогрессии, более или менее традиционен. Следует обратить ваше внимание лишь на несколько моментов.

Во-первых, в § 16 вы найдете вывод формулы n-го члена арифметической прогрессии методом математической индукции. Будете вы показывать это доказательство учащимся или нет, зависит, естественно, от условий, в которых вы работаете.

Во-вторых, в том же параграфе решается следующая задача.

Турист, двигаясь по сильно пересеченной местности, за первый час пути прошел 800 м, а за каждый следующий час проходил на 25 м меньше, чем за предыдущий. Сколько времени он потратил на весь путь, равный 5700 м?

Обозначив буквой n время движения туриста, мы получили для n две возможности: $n_1 = 8$, $n_2 = 57$. Далее в учебнике сказано, что по смыслу задачи из двух найденных значений надо выбрать первое: $n = 8$. У ваших учеников может возникнуть вопрос: почему не подходит второе значение и, вообще, каков содержательный смысл второго значения, откуда оно взялось?

Дело в том, что математической моделью ситуации является арифметическая прогрессия 800, 775, 750, 725, ... Сумма первых восьми членов этой прогрессии равна 5700:

$$800 + 775 + 750 + 725 + 700 + 675 + 650 + 625 = 5700.$$

На 41-м месте в данной прогрессии находится число 0, к этому моменту число S_n достигает максимума:

$$S_{41} = \frac{2a_1 + d(41 - 1)}{2} \cdot 41 = 12\,300.$$

Начиная с 42-го места члены прогрессии становятся отрицательными числами, сумма n членов прогрессии становится все меньше и меньше, и, наконец, получается, что $S_{57} = 5700$. Вот теперь становится предельно ясно, почему по смыслу данной задачи взять нужно лишь значение $n = 8$.

В-третьих, обратите внимание на упоминание в § 17 терминов «экспонента» и «показательная функция». Опережающее введение этих терминов отражает общую тенденцию нашего курса на использование элементов опережающего обучения. Выход в зону ближайшего развития (термин классика психологии *Л. С. Выготского*) — составная часть всякого развития.

Наконец, в-четвертых, заметьте, что большое внимание в нашем учебнике (и задачнике) уделяется характеристическим свойствам прогрессий.

Тема 5

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В соответствии с письмом Министерства образования Российской Федерации от 23 сентября 2003 года № 03-93ин/13-03 в содержание математического образования основной школы постепенно вводятся элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей. За это время должен быть накоплен опыт преподавания элементов статистики и теории вероятностей, осуществлена переподготовка учителей. В этот период задания по вероятности и статистике не должны включаться в материалы для административного контроля. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей не входят пока и в материалы для итоговой аттестации выпускников основной школы. Как сказано в этом письме, «...изучение элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в основной и старшей школе станет обязательным после утверждения федерального компонента государственного стандарта общего образования».

Различные варианты объема и характера изложения в средней школе элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей (более кратко, стохастики) неоднократно появлялись и обсуждались на протяжении последних 10—15 лет. Первые версии, входившие в проекты обязательного минимума содержания обучения математике, включали явно избыточный материал вплоть до плотностей непрерывно распределенных случайных величин, их математического ожидания и дисперсии и т. п. Опубликованный в 2004 году стандарт математического образования зафиксировал объем стохастического материала в форме, более пригодной для включения в рамки традиционного курса алгебры и позже алгебры и начал математического анализа. Во избежание неточностей процитируем указанный стандарт в его стохастической части, относящейся к основной школе (курсивом выделен необязательный материал).

Множества и комбинаторика. *Множество. Элемент множества, подмножество. Объединение и пересечение множеств. Диаграммы Эйлера.* Примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило умножения.

Статистические данные. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков. Средние результатов измерений. Понятие о статистическом выводе на основе выборки.

Понятие и примеры случайных событий.

Вероятность. Частота события, вероятность. Равновозможные события и подсчет их вероятности. Представление о геометрической вероятности.

Вся стохастическая линия сплетена из трех «косичек»: комбинаторной, вероятностной и статистической. В различных УМК по математике, входящих в Федеральный перечень учебников, авторы, вообще говоря, по-разному комбинируют эти составляющие. Например, очень популярна в последнее время идея о том, что базовой для изложения стохастики должна непременно быть статистическая линия. Другими словами, начинать изучение полагается с различных таблиц и диаграмм, способов размещения в них экспериментальных данных, с группировки и обработки данных, со знакомства с такими понятиями, как размах, среднее, мода, медиана рядов данных и т. п. Может быть (хотя совсем и не очевидно), эта позиция верна, если рассуждать о преподавании именно и только стохастики. Но в России имеется сложившийся курс математики в средней школе, и основная сложность состоит в наиболее приемлемой форме интеграции новых образовательных линий в традиционные методические рамки обучения. К тому же школьные учителя в подавляющем большинстве с элементами комбинаторики и простейшими задачами теории вероятностей хоть как-то знакомы, а вот вся статистическая терминология и идеология для них совершенно нова и непривычна.

По этим причинам, а также, быть может, и по формальным соображениям мы следуем порядку нового материала, предложенному в стандарте: **§ 3** «Множества и операции над ними», **§ 18** «Комбинаторные задачи», **§ 19** «Статистика — дизайн информации», **§ 20** «Простейшие вероятностные задачи», **§ 21** «Экспериментальные данные и вероятности событий».

§ 18 «Комбинаторные задачи» является упрощенным и довольно сильно переработанным вариантом **§ 1** учебного пособия «События. Вероятности. Статистическая обработка данных».[2]

---

[2] Здесь и далее ссылка делается на книгу: События. Вероятности. Статистическая обработка данных : дополнительные параграфы к курсу алгебры / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : Мнемозина, 2002—2009.

Первоначальный материал связан с непосредственным перебором всех возможных комбинаций в той или иной задаче. Затем рассказано, как такой перебор удобно организовать в виде дерева вариантов, и только после этого говорится о правиле умножения как о кратком способе получения ответов в различных комбинаторных задачах.

Как одно из применений правила умножения появляются понятия факториала и числа всех перестановок элементов конечного множества.

В систему упражнений задачника включено довольно много заданий алгебраического характера, связанных с комбинаторикой: тут и числовые выражения, и буквенные выражения и их упрощения, решение уравнений и вопросы делимости. Другими словами, комбинаторику мы рассматриваем как раздел «обычной» алгебры, а не как нечто специальное и отдельное. Обратим, например, внимание на задачу **№ 18.9.** На координатной плоскости отмечены все точки, абсциссы и ординаты которых равны одному из следующих чисел: -3, -1, 1, 2, 7 (повторения допускаются).

а) Сколько всего таких точек?

б) Сколько точек лежит левее оси ординат?

в) Сколько точек лежит выше оси абсцисс?

г) Сколько точек лежит в круге радиусом 5 с центром в начале координат?

С одной стороны, при ее решении закрепляются комбинаторные навыки. С другой стороны, мы просто повторяем тему «Координатная плоскость» и не забываем про геометрию.

Еще пример: задача **№ 18.10.** Известно, что $x = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$ (совпадения допускаются).

а) Найдите наименьшее и наибольшее значения числа x.

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

в) Сколько среди них будет четных чисел?

г) Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся нулем?

Снова по форме задача комбинаторная, но фактически повторяет ранее изученный материал: разложение натуральных чисел на простые множители.

Мы считаем, что именно на пути укрепления межпредметных связей можно достичь надежных успехов при введении нового учебного раздела — комбинаторики.

Формулы для числа размещений и сочетаний, как это и указано в стандарте, в основной школе не рассматриваются, хотя в достаточно подготовленных классах с ними вполне можно познакомиться, используя, например, материал **§ 2** учебного пособия, указанного в сноске на с. 20.

В самом названии **§ 19** «Статистика — дизайн информации» мы делаем акцент на описательную статистику, т. е. в первую очередь обращаем внимание на статистику как на обработку данных того или иного эксперимента. Материал этот — качественно новый для большинства учителей. Мы фиксируем одно конкретное измерение (время проезда из дома на работу) и шаг за шагом показываем, как можно преобразовывать (упорядочивать, группировать, собирать в таблицы, изображать графически) имеющиеся данные.

Несколько слов о терминологии. Устоявшейся системы названий для школьного преподавания статистики нет. Термины из высшей школы на первых порах поражают своим разнообразием. Вот, например, перечень словосочетаний, связанных с понятием «частота». Тут и просто «частота», и «абсолютная частота», и «относительная частота», и «эмпирическая частота», и «статистическая частота», и, быть может, еще что-то. Кроме того, довольно произвольно добавляются еще и другие термины: «событие», «случайное событие», «варианта», «результат измерения» и т. п. Даже в учебниках весьма опытных авторов появляются словосочетания типа «относительная частота случайного события», на самом деле смешивающие термины из статистики и теории вероятностей. Но это еще полбеды. Оказывается, что, как правило, значение частоты — это число из отрезка [0; 1], но вот значение «абсолютной частоты» — это число натуральное. К этому очень непросто привыкнуть.

В **§ 19** наш подход состоит в том, что есть только одна «частота», она же относительная и последняя, а вместо термина «абсолютная частота» мы используем новый для статистики термин «кратность». Например, в ряду из десяти чисел 1, 3, 5, 7, 7, 2, 4, 7, 3, 1 кратность числа 7 равна трем: именно столько раз семерка встретилась в этом ряду.

Подчеркнем, что в **§ 19** происходит, по существу, первое знакомство учеников с элементами статистики. Поэтому основное внимание следует обратить на формирование практических навыков обработки результатов измерения, а не на заучивание и воспроизведение новых определений. В классе из 20—25 человек можно провести какой-нибудь простой эксперимент и затем шаг за шагом обработать его результаты в порядке, приведенном в **§ 19**. Например, можно предложить задумать каждому из учеников натуральное число от 11 до 15, результаты выписать на доску и далее группировать и упорядочивать информацию, представлять данные в табличной и графической форме.

В **§ 20** разобраны именно «простейшие» вероятностные задачи. Изложение напрямую связано с ситуациями из «комбинаторного» § 18 и одной из своих учебных целей предполагает закрепление умений и навыков, полученных при работе с предыдущим материалом. Какого-либо специального внимания к отработке понятий «случайное событие», «невозможное событие», «достоверное событие» и т. п. мы не предполагаем, хотя упоминаем и используем эти термины.

На наш взгляд, излишне назойливое внимание к повторению предложений «случайное событие — это событие, которое в данном испытании может как произойти, так и не произойти» или «невозможное событие — это событие, которое никогда не произойдет при данных условиях» вряд ли способствует решению конкретных задач. При знакомстве с новыми понятиями и терминами не стоит сразу заниматься, как иногда говорят, «формированием компетентностей». Для начала мы предлагаем решить несколько интересных задач и обсудить их результаты.

Рассмотрена только классическая вероятностная схема, в которой все элементарные исходы равновозможны. Не стоит, на наш взгляд, пытаться *доказывать*, что, например, вероятности выпадения «решки» и «орла» равны по 0,5. Лучше честно предупредить, что это предположение, которое нам естественно и удобно принять в рамках *простейшей модели* окружающей действительности. Ведь не пытаемся же мы, например, в текстовых задачах на движение *обосновывать*, что автомобиль движется с постоянной скоростью.

Вообще мы стараемся не слишком теоретизировать относительно «природы случайного» и т. п., а уделяем основное внимание конкретным задачам. Например, хотя мы и приводим на с. 200 учбеника обычное классическое определение вероятности (фраза из 26 слов!), но предпочитаем начинать с его переформулировки в виде некоторого алгоритма действий, прямо направленного на конкретные вычисления. Само изложение не носит никакого дедуктивного характера, а основано на разборе задач, упражнений, примеров и обсуждении полученных результатов. Например, если теоремы и присутствуют в тексте, то в основном как способ лаконичного подведения итогов предшествующих обсуждений. Таков же наш подход к определениям и новым терминам: они явно формулируются только после того, как из рассмотрения практических вопросов становится ясной необходимость их введения. Из новых понятий рассмотрены несовместные события, противоположные события. О связи между «алгеброй событий» и «алгеброй множеств» мы кратко говорим (никаких «алгебр», конечно, нет), но используем эту связь конкретно лишь для получения формулы вероятности суммы двух несовместных событий и ее следствий. По сравнению с вероятностным § 3 упомянутого в сноске на с. 20 учебного пособия сильно упрощены условия задач, так как отсутствуют сочетания и размещения, но добавлены задачи на геометрическую вероятность, что делает изложение более наглядным.

Последний параграф главы — § 21 «Экспериментальные данные и вероятности событий», в отличие от предыдущих параграфов, носит более описательный характер. Повторим, что статистические данные, как правило, представляют собой данные какого-либо конкретного измерения, проведенного в *реальности*, а при вычислении вероятностей случайных событий мы имеем дело с той или иной *моделью реальности*. На конкретных примерах рассказано о связи между реальностью и моделями реальности. Основная цель — помочь формированию первых представлений о явлении статистической устойчивости. Изучение параграфа лучше организовать в виде выполнения серий упражнений практического характера. Вполне достаточный набор вариантов такого рода упражнений приведен в задачнике.

Часть 2

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ УПРАЖНЕНИЙ ИЗ ЗАДАЧНИКА

Глава 1

1.24. Найти такое целочисленное значение параметра p, при котором во множестве решений неравенства $(x + 2)(p - x) \geqslant 0$ содержится: а) четыре целых числа; б) два натуральных числа; в) два целых числа; г) одно целое число.

Решение. Преобразуем неравенство к виду $(x + 2)(x - p) \leqslant 0$ и рассмотрим три возможности: $p = -2$, $p > -2$, $p < -2$.

Если $p = -2$, то неравенство принимает вид $(x + 2)^2 \leqslant 0$; решением неравенства является число $x = -2$.

Если $p > -2$, то решение неравенства имеет вид $-2 \leqslant x \leqslant p$.

Если $p < -2$, то решение неравенства имеет вид $p \leqslant x \leqslant -2$.

Подготовительная работа закончена.

а) Когда во множестве решений содержится четыре целых числа? Когда целое число p равно 1 или -5. Почему? Если $p = 1$, то решением неравенства служит отрезок $[-2; 1]$, содержащий четыре целых числа: $-2, -1, 0, 1$. Если $p = -5$, то решением неравенства служит отрезок $[-5; -2]$, содержащий четыре целых числа: $-5, -4, -3, -2$.

б) Два натуральных числа будут содержаться во множестве решений при $p = 2$. В самом деле, в этом случае решением неравенства служит отрезок $[-2; 2]$, а в этом отрезке содержится ровно два натуральных значения: 1 и 2.

в) Когда во множестве решений содержится два целых числа? Когда целое число p равно -1 или -3. Почему? Если $p = -1$, то решением неравенства служит отрезок $[-2; -1]$, содержащий два целых числа: -2 и -1. Если $p = -3$, то решением неравенства служит отрезок $[-3; -2]$, содержащий два целых числа: -3 и -2.

г) Одно целочисленное решение будет лишь при $p = -2$: значение $x = -2$.

Аналогично решаются **№ 1.25, 1.26**, причем они проще, поскольку параметр p в этих примерах принимает лишь натуральные значения.

Эта линия решения неравенств с параметром продолжается в **№ 2.37, 4.39**.

2.37. Найти такое целочисленное значение параметра p, при котором множество решений неравенства $x^2(x + 2)(p - x) \geqslant 0$

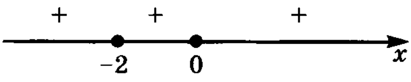


Рис. 13

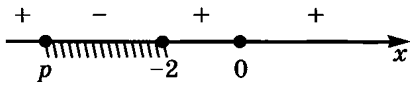


Рис. 14

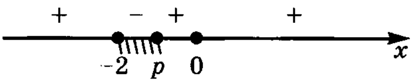


Рис. 15

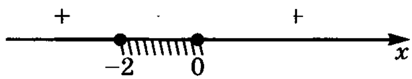


Рис. 16

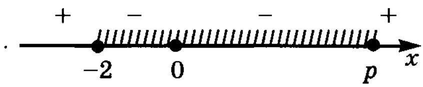


Рис. 17

содержит: а) два целых числа; б) четыре целых числа; в) три целых числа; г) пять целых чисел.

Р е ш е н и е. Преобразуем неравенство к виду $x^2(x+2)(x-p) \leqslant 0$ и рассмотрим следующие возможности:

$$p=-2,\ p<-2,\ -2<p<0,\ p=0,\ p>0.$$

Если $p=-2$, то неравенство принимает вид $x^2(x+2)^2 \leqslant 0$; решение неравенства состоит из двух точек: $x=-2$, $x=0$ (рис. 13). На рисунках 14—17 представлены геометрические модели решения неравенства соответственно в случаях: $p<-2$, $-2<p<0$, $p=0$, $p>0$.

Используя геометрические иллюстрации, получаем ответ на вопрос задачи.

а) Во множестве решений содержится лишь два целых числа при $p=-2$ (рис. 13).

б) Во множестве решений содержится четыре целых числа при $p=-4$ (рис. 14) и при $p=1$ (рис. 17).

в) Во множестве решений содержится три целых числа при $p=-3$ (см. рис. 14), при $p=-1$ (рис. 15) и при $p=0$ (рис. 16).

г) Во множестве решений содержится пять целых чисел при $p=-5$ (см. рис. 14) и при $p=2$ (см. рис. 17).

3.18. В записи «$* \in \{4, \Delta, 9\}$» вместо значков * и Δ можно поставить любые цифры, меньшие 3. Будут получаться различные утверждения: $0 \in \{4, 0, 9\}$, $1 \in \{4, 2, 9\}$ и т. п.

а) Сколько получится утверждений, в которых на первом месте стоит цифра 2?

б) Сколько получится утверждений, в которых на месте Δ стоит положительная цифра?

в) Сколько всего утверждений получится?

г) Какую часть из всех утверждений составляют верные утверждения?

Р е ш е н и е. а) Таких утверждений три: $2 \in \{4, 0, 9\}$, $2 \in \{4, 1, 9\}$, $2 \in \{4, 2, 9\}$, поскольку вместо значка Δ можно поставить либо 0, либо 1, либо 2.

б) Если на месте Δ стоит положительная цифра, т. е. 1 или 2 (два варианта), а на месте * стоит цифра 0, 1 или 2 (три варианта), то всего можно составить $2 \cdot 3 = 6$ утверждений.

в) Рассуждая, как в пункте б), получаем, что всего можно составить 9 утверждений.

г) Верными будут те утверждения, в которых на местах * и Δ стоят одинаковые цифры: 0 и 0, 1 и 1, 2 и 2. Таких утверждений — три, они составляют $\frac{1}{3}$ общего числа утверждений.

Последнее задание при желании можно переформулировать: какова вероятность того, что получится верное утверждение?

В задачах **№ 3.21—3.25** предлагается использовать круги (диаграммы) Эйлера. В принципе **№ 3.21—3.23** можно решить и без них, рассматривайте эти задачи как подготовительные к решению более трудных задач **№ 3.24, 3.25**, где без кругов Эйлера обойтись довольно сложно.

3.23. По плану застройки участок площадью 1500 м^2 состоит из двух пересекающихся прямоугольников, их пересечение отведено под гараж. Площадь первого прямоугольника равна 900 м^2, площадь второго — 700 м^2. Найти площадь: а) участка, отведенного под гараж; б) части первого прямоугольника, не отведенного под гараж; в) части второго прямоугольника, не отведенного под гараж; г) части застройки без учета гаража.

Р е ш е н и е. Достаточно выполнить диаграмму Эйлера (рис. 18), чтобы ответы на все вопросы стали предельно понятными: а) 100; б) 800; в) 600; г) 1400.

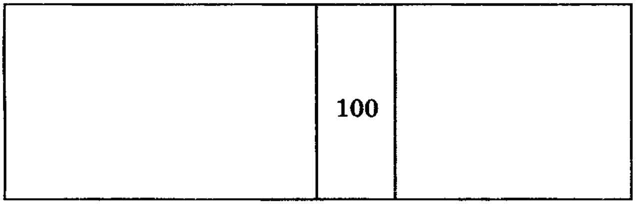


Рис. 18

3.24. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников 9-го класса читал книги A, B, C. Результаты опроса выглядят так: книгу A прочитали 25 учеников, книгу B — 22 ученика, книгу C — 22 ученика; одну из книг A или B прочитали 33 ученика, одну из книг A или C прочитали 32 ученика, одну из книг B или C — 31 ученик. Все три книги прочитали 10 учеников.

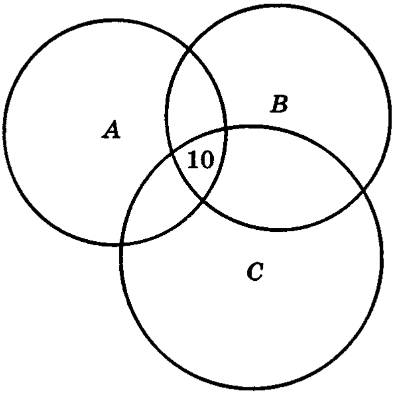


Рис. 19

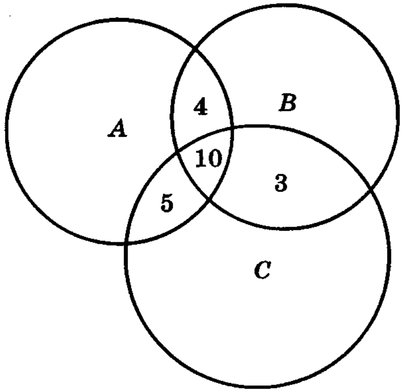


Рис. 20

Сколько учеников: а) прочитали только по одной книге; б) прочитали ровно две книги; в) не читали ни одной из указанных книг?

Решение. Речь фактически идет о трех пересекающихся множествах A, B, C, состоящих соответственно из 25, 22 и 22 элементов, про которые известно следующее:

$$A \cup B = 33,\ A \cup C = 32,\ B \cup C = 31,\ A \cap B \cap C = 10.$$

Используя последнее соотношение, рисуем круги Эйлера и в пересечении трех множеств указываем его численность 10 (рис. 19).

В множестве A 25 элементов, в множестве B 22 элемента, а в их объединении 33 элемента. Значит, в пересечении этих множеств содержится $25 + 22 - 33 = 14$ элементов. Рассуждая аналогично, заключаем, что в пересечении множеств A и C содержится 15 элементов, а в пересечении множеств B и C — 13 элементов. Поскольку в пересечении всех трех множеств содержится 10 элементов, получаем новую информацию на диаграмме (рис. 20), а затем и итоговую информацию (рис. 21).

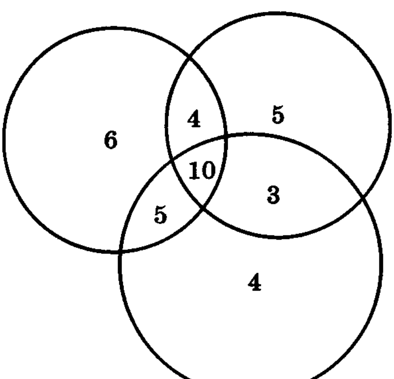


Рис. 21

Теперь можно ответить на все поставленные вопросы.

а) По одной книге прочитали $6 + 5 + 4 = 15$ учеников.

б) По две книги прочитали $3 + 5 + 4 = 12$ учеников.

в) Ни одной книги не прочитали $40 - 15 - 12 - 10 = 3$ ученика.

3.25. Каждый из учеников 9-го класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, посмотрев спектакли A, B или C. При этом спектакли A, B, C видели соответственно 25, 12 и 23 ученика. Сколько учеников в классе?

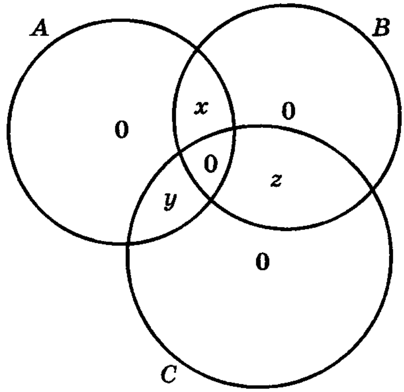


Рис. 22

Решение. Пусть спектакли A и B посмотрели x учеников, спектакли A и C — y учеников, спектакли B и C — z учеников. Как и в предыдущей задаче, изобразим круги Эйлера, учтя при этом, что все интересующие нас числа расположатся в пересечении только двух множеств (рис. 22). Из условия задачи следует, что $A = x + y = 25$, $B = x + z = 12$, $C = y + z = 23$. Сложив эти три равенства, получим $2x + 2y + 2z = 60$, откуда следует, что $x + y + z = 30$. Значит, всего в классе 30 учеников.

4.27. г) Решить систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 + x}{9x^2 - 25} \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} \leqslant \dfrac{1-2x}{x^2-1}. \end{cases}$

Решение. Решим первое неравенство системы:

$$\frac{x(x^2+x+1)}{(3x-5)(3x+5)} \geqslant 0; \quad \frac{x}{\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)} \geqslant 0$$

(в знаменателе вынесли за скобки 9 и учли, что выражение $\dfrac{x^2+x+1}{9}$ положительно при любых значениях x). Применив для решения последнего неравенства метод интервалов, получим: $-\frac{5}{3} < x \leqslant 0$; $x > \frac{5}{3}$.

Решим второе неравенство системы:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1-2x}{(x+1)(x-1)} \leqslant 0; \quad \frac{5x}{(x+1)(x-1)} \leqslant 0.$$

Применив для решения последнего неравенства метод интервалов, получим: $x < -1$; $0 \leqslant x < 1$.

Осталось найти пересечение найденных решений неравенств системы: $-\frac{5}{3} < x < -1$; $x = 0$.

4.40. При каких значениях параметра p неравенство

$$(p-2)x^2-(p-4)x+(3p-2)>0$$

а) не имеет решений; б) выполняется при любых значениях x?

Решение. Сначала следует рассмотреть случай, когда неравенство не является квадратным, — случай $p = 2$. При этом значении p неравенство принимает вид $2x + 4 > 0$, откуда находим: $x > -2$. Это не соответствует ни заданию а), ни заданию б). Следовательно, можно считать, что $p \neq 2$, т. е. заданное неравенство является квадратным.

а) Квадратное неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ не имеет решений, если $a < 0$, $D \leqslant 0$ (D — дискриминант квадратного трехчлена). Имеем:

$$D=(p-4)^2-4(p-2)(3p-2)=-11p^2+24p.$$

Значит, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} p-2<0, \\ -11p^2+24p\leqslant 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $p \leqslant 0$.

б) Квадратное неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ выполняется при любых значениях x, если $a > 0$ и $D < 0$. Следовательно, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} p-2>0, \\ -11p^2+24p<0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $p > \dfrac{24}{11}$.

Глава 2

5.29. а) Построить график уравнения $x^2 + y^2 + 8x = 0$.

Решение. Воспользуемся методом выделения полного квадрата. Имеем:

$$x^2+y^2+8x=(x^2+8x+16)+y^2-16=(x+4)^2+y^2-16.$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде

$$(x+4)^2+y^2=16.$$

Это — уравнение окружности с центром в точке $(-4; 0)$ и радиусом 4.

5.30. г) Найти целочисленные решения уравнения $4y - 5x = 19$.

Решение. Выразив из заданного уравнения y, получим: $y = \dfrac{19+5x}{4}$. Нас интересуют лишь целочисленные решения уравнения, поэтому целое число $19 + 5x$ должно делиться без остатка на 4.

Для целого числа x имеются четыре возможности: 1) $x \vdots 4$, т. е. $x = 4k$; 2) число x при делении на 4 дает в остатке 1, т. е. $x = 4k + 1$; 3) число x при делении на 4 дает в остатке 2, т. е. $x = 4k + 2$; 4) число x при делении на 4 дает в остатке 3, т. е. $x = 4k + 3$.

Если $x = 4k$, то $19 + 5x = 19 + 20k$; это число на 4 не делится.

Если $x = 4k + 1$, то $19 + 5x = 19 + 5(4k + 1) = 24 + 20k = 4(6 + 5k)$; это число делится на 4.

Если $x = 4k + 2$, то $19 + 5x = 29 + 20k$; это число не делится на 4.

Если $x = 4k + 3$, то $19 + 5x = 34 + 20k$; это число не делится на 4.

Итак, нас устраивает единственная возможность: $x = 4k + 1$; тогда $y = \frac{19 + 5x}{4} = \frac{4(6 + 5k)}{4} = 6 + 5k$. Значит, целочисленным решением уравнения служит любая пара вида $(4k + 1;\ 6 + 5k)$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

5.31. а) Найти целочисленные решения уравнения $9x^2 - 4y^2 = 5$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $(3x - 2y)(3x + 2y) = 5$. Левая часть уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. Это произведение может равняться 5 лишь в четырех случаях: когда первый множитель равен 1, а второй 5; когда первый множитель равен -1, а второй -5; когда первый множитель равен 5, а второй 1; когда первый множитель равен -5, а второй -1. Значит, задача сводится к решению четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 3x + 2y = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 3x + 2y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -5, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$$

Из первой системы находим: $x = 1$, $y = 1$, из второй — $x = -1$, $y = -1$, из третьей — $x = 1$, $y = -1$, из четвертой — $x = -1$, $y = 1$.

5.32. Найти целочисленные решения уравнения:

а) $xy = 2x + y$; б) $2x^2 + xy - y^2 = 5$.

Р е ш е н и е. а) Преобразуем уравнение к виду $x(y - 2) = y$. Поскольку значение $y = 2$ не удовлетворяет заданному уравнению (получается уравнение $2x = 2x + 2$, не имеющее решений), можно перейти к записи $x = \frac{y}{y - 2}$. Дробь в правой части полученного уравнения является целым числом лишь при следующих значениях y: 1) $y = 0$, тогда $x = 0$; 2) $y = 1$, тогда $x = -1$; 3) $y = 3$, тогда

$x = 3$; 4) $y = 4$, тогда $x = 2$. При всех остальных целочисленных значениях y дробь $\frac{y}{y-2}$ не будет целым числом.

б) Разложим левую часть уравнения на множители; получим:

$$(2x - y)(x + y) = 5.$$

Левая часть уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. Это произведение может равняться 5 лишь в четырех случаях: когда первый множитель равен 1, а второй 5; когда первый множитель равен −1, а второй −5; когда первый множитель равен 5, а второй 1; когда первый множитель равен −5, а второй −1. Значит, задача сводится к решению четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -1, \\ x + y = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 5, \\ x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -5, \\ x + y = -1. \end{cases}$$

Из первой системы находим: $x = 2$, $y = 3$, из второй — $x = -2$, $y = -3$, из третьей — $x = 2$, $y = -1$, из четвертой — $x = -2$, $y = 1$.

Ответ: а) (0; 0), (3; 3), (−1; 1), (2; 4); б) (2; 3), (2; −1), (−2; 1), (−2; −3).

5.33. Найти двузначное число, которое в 6 раз больше суммы своих цифр.

Решение. Если x — цифра десятков, а y — цифра единиц, то искомое число имеет вид $10x + y$, а математическая модель задачи такова: $10x + y = 6(x + y)$, т. е. $4x = 5y$. Поскольку речь идет об отыскании однозначных натуральных решений этого уравнения, получаем: $x = 5$, $y = 4$. Искомое число равно 54.

5.37. а) При каком значении параметра p система уравнений

$$\begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y + px = 4 \end{cases}$$

имеет одно решение?

Решение. $y = x^2 + 4$ — парабола с вершиной в точке (0; 4) и ветвями вверх; $y = 4 - px$ — прямая, проходящая через точку (0; 4). Если прямая параллельна оси x (это будет при $p = 0$), то она касается параболы и имеет с ней лишь одну общую точку (рис. 23); это значит, что заданная система уравнений имеет одно решение. Если $p \neq 0$, то прямая пересекает параболу в ее вершине и еще в одной точке (рис. 24), т. е. заданная система имеет два решения.

Ответ: $p = 0$.

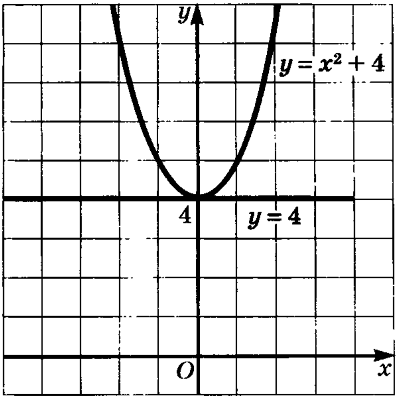


Рис. 23

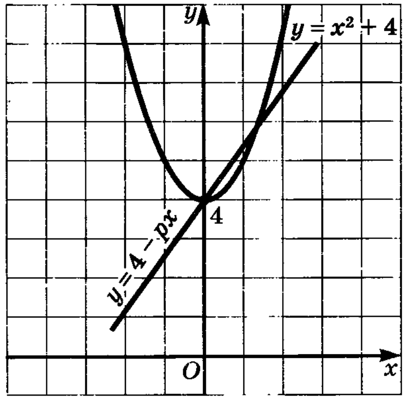


Рис. 24

5.38. При каком значении параметра p система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - x^2 = p \end{cases}$$

имеет: а) три решения; б) одно решение?

Решение. Геометрическим образом первого уравнения системы служит окружность с центром в начале координат и радиусом 2. Геометрическим образом второго уравнения системы является парабола с ветвями вверх и вершиной в точке (0; p). На рис. 25 изображен случай взаимного расположения этих кривых, когда они имеют лишь одну общую точку, — это будет при $p = 2$. На рис. 26 представлен случай взаимного расположения

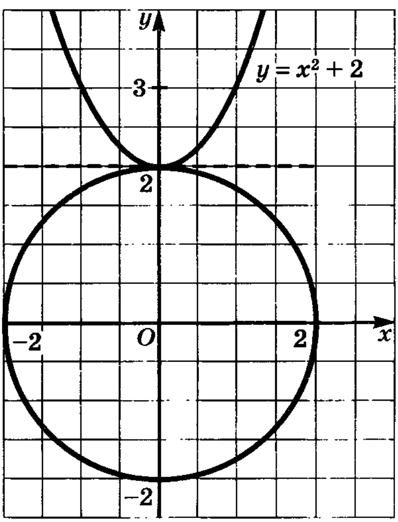


Рис. 25

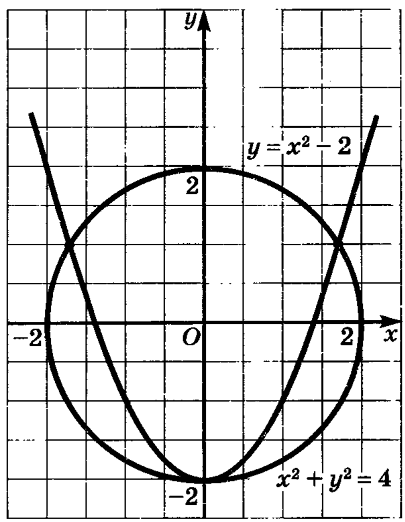


Рис. 26

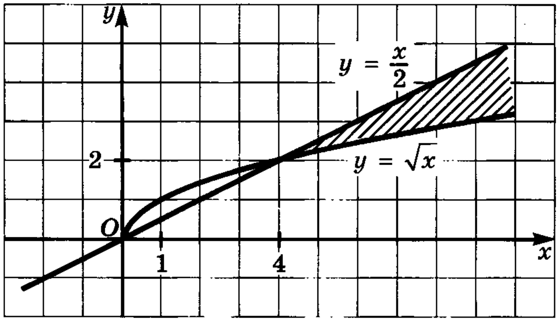


Рис. 27

параболы к окружности, когда они имеют три общие точки, — это будет при $p = -2$. При всех остальных значениях параметра парабола и окружность в силу осевой симметрии будут иметь четное число общих точек (0, 2, 4), что нас не устраивает.

Ответ: а) $p = 2$; б) $p = -2$.

5.39. б) Решить графически систему неравенств $\begin{cases} y - \sqrt{x} \geqslant 0, \\ x - 2y \geqslant 0. \end{cases}$

Решение представлено на рис. 27.

6.22. а) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x + y)^2 + 2x = 35 - 2y, \\ (x - y)^2 - 2y = 3 - 2x. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} (x + y)^2 + 2(x + y) = 35, \\ (x - y)^2 + 2(x - y) = 3. \end{cases}$$

Положив $x + y = a$, $x - y = b$, получим более простую систему:

$$\begin{cases} a^2 + 2a = 35, \\ b^2 + 2b = 3. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $a_1 = 5$, $a_2 = -7$; из второго уравнения находим: $b_1 = 1$, $b_2 = -3$. Значит, задача сводится к решению четырех систем уравнений (более точный термин — к решению совокупности систем уравнений):

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7, \\ x - y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7, \\ x - y = -3. \end{cases}$$

Ответ: (3; 2), (1; 4), (−3; −4), (−5; −2).

6.23. а) Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{5}{x^2 - xy} + \dfrac{4}{y^2 - xy} = -\dfrac{1}{6},\\[2mm] \dfrac{7}{x^2 - xy} - \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{6}{5}.\end{cases}$$

Решение. Введем две новые переменные:

$$a = \frac{1}{x^2 - xy},\quad b = \frac{1}{y^2 - xy}.$$

Тогда заданная система примет более простой вид:

$$\begin{cases}5a + 4b = -\dfrac{1}{6},\\[2mm] 7a - 3b = \dfrac{6}{5}.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $a = \dfrac{1}{10}$, $b = -\dfrac{1}{6}$. Далее задача сводится к решению системы $\begin{cases}x^2 - xy = 10,\\ y^2 - xy = -6.\end{cases}$ Эта система имеет два решения: (5; 3), (−5; −3).

6.24. а) Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(3;\ 13)$, $B(-7;\ -11)$, $C(10;\ 6)$.

Решение. Будем искать уравнение окружности в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Окружность проходит через точку (3; 13), значит, $(3 - a)^2 + (13 - b)^2 = R^2$. Окружность проходит через точку (−7; −11), значит, $(-7 - a)^2 + (-11 - b)^2 = R^2$. Окружность проходит через точку (10; 6), значит, $(10 - a)^2 + (6 - b)^2 = R^2$. В итоге получаем систему из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases}(3 - a)^2 + (13 - b)^2 = R^2,\\ (-7 - a)^2 + (-11 - b)^2 = R^2,\\ (10 - a)^2 + (6 - b)^2 = R^2.\end{cases}$$

Наличие трех переменных не должно нас сильно смущать, поскольку от R^2 можно избавиться, приравняв левые части первого и второго уравнений системы, а также первого и третьего уравнений системы. Получим более привычную для учащихся систему двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases}(3 - a)^2 + (13 - b)^2 = (-7 - a)^2 + (-11 - b)^2,\\ (3 - a)^2 + (13 - b)^2 = (10 - a)^2 + (6 - b)^2.\end{cases}$$

После понятных преобразований система примет весьма простой вид: $\begin{cases} 5a + 12b = 2, \\ a - b = -3. \end{cases}$

Значит, $a = -2$, $b = 1$. Выше мы видели, что $(3 - a)^2 + (13 - b)^2 = R^2$; подставив в это уравнение вместо a и b их значения, найдем, что $R = 13$.

Найденные значения трех переменных осталось подставить в общее уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Получим: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 169$.

Перейдем к решению текстовых задач. Советуем вам все время бить в одну точку — оформлять решение этих задач в виде трех этапов математического моделирования, что мы пропагандируем в своих учебниках начиная с 7 класса (хотя на самом деле это надо делать и в 5—6 классах): составление математической модели, работа с моделью и ответ. И еще одно: в ряде случаев, там, где, на наш взгляд, подробных комментариев учителю не требуется, мы на первом этапе ограничиваемся тезисной записью подхода к составлению математической модели.

7.37. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 70 км от пункта A, выехал велосипедист, а через некоторое время — мотоциклист со скоростью движения 50 км/ч. Мотоциклист догнал велосипедиста в 20 км от пункта A. Прибыв в B, мотоциклист через 36 мин выехал обратно и встретился с велосипедистом спустя 3 ч 20 мин после выезда велосипедиста из A. Найти скорость велосипедиста.

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

x км/ч — скорость велосипедиста;

y ч — время от старта велосипедиста до старта мотоциклиста;

$\frac{20}{x}$ ч — время движения велосипедиста до первой встречи с мотоциклистом;

$\frac{20}{50}$ ч, т. е. $\frac{2}{5}$ ч, — время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом.

Первое уравнение очевидно: $\frac{20}{x} - \frac{2}{5} = y$.

Обсудим ситуацию, связанную со второй встречей участников движения. До второй встречи велосипедист был в пути 3 ч 20 мин, т. е. $\frac{10}{3}$ ч, и прошел путь $\frac{10x}{3}$ км. Мотоциклист до этой встречи потратил меньше времени на движение, чем велосипедист. Во-первых, он выехал на y ч позднее; во-вторых, он 36 мин, т. е. $\frac{3}{5}$ ч, находился в пункте B. Следовательно, время движения мотоциклиста до второй встречи с велосипедистом таково: $\left(\frac{10}{3} - y - \frac{3}{5}\right)$ ч, т. е. $\left(\frac{41}{15} - y\right)$ ч. Таким образом, путь мотоциклиста до второй встречи выражается формулой $50\left(\frac{41}{15} - y\right)$ км. Суммарный путь, пройденный до второй встречи велосипедистом и мотоциклистом, равен удвоенному расстоянию между A и B, т. е. 140 км. В результате мы приходим ко второму уравнению:

$$\frac{10x}{3} + 50\left(\frac{41}{15} - y\right) = 140.$$

Математическая модель задачи составлена:

$$\begin{cases} \dfrac{20}{x} - \dfrac{2}{5} = y, \\ \dfrac{10x}{3} + 50\left(\dfrac{41}{15} - y\right) = 140. \end{cases}$$

<u>Второй этап</u>. *Работа с составленной моделью.*

Решив систему уравнений, получим: $\left(15;\ \frac{14}{15}\right)$ или $\left(-20;\ -\frac{7}{5}\right)$.

<u>Третий этап</u>. *Ответ на вопрос задачи.*

Из найденных пар условиям задачи удовлетворяет лишь первая. Значит, скорость велосипедиста 15 км/ч.

7.38. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. Каждый идет с постоянной скоростью без остановок и, придя в конечный пункт, тут же поворачивает обратно. Когда они встретились во второй раз, оказалось, что первый прошел на 4 км больше, чем второй. После второй встречи первый прибыл в A через час, а второй в B — через 2,5 ч. Найти скорости пешеходов.

Решение. <u>Первый этап</u>.

x км/ч — скорость первого пешехода;

y км/ч — скорость второго пешехода;

x км — путь первого пешехода от пункта C — места второй встречи — до пункта A (рис. 28); этот путь равен x км, поскольку от C до A первый пешеход шел 1 час;

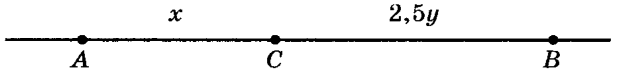


Рис. 28

$2,5y$ км — путь второго пешехода от места второй встречи (пункта C) до пункта В (рис. 28), поскольку от C до B второй пешеход шел 2,5 ч.

По условию путь первого пешехода до второй встречи, т. е. длина маршрута ABC, на 4 км больше, чем путь второго пешехода до второй встречи, — этот второй путь равен длине маршрута BAC. Длина маршрута ABC выражается формулой $(x + 5y)$ км, а длина маршрута BAC — $(2x + 2,5y)$ км. Первое уравнение имеет вид

$$(x + 5y) - (2x + 2,5y) = 4,$$

т. е.

$$5y - 2x = 8.$$

Учтем теперь, что до второй встречи пешеходы находились в пути одинаковое время. Следовательно,

$$\frac{x + 5y}{x} = \frac{2x + 2,5y}{y},$$

т. е.

$$4x^2 + 3xy - 10y^2 = 0.$$

Математической моделью задачи служит система уравнений

$$\begin{cases} 5y - 2x = 8, \\ 4x^2 + 3xy - 10y^2 = 0. \end{cases}$$

Второй этап.

Составленная система имеет два решения: (4; 3,2) или $\left(-\frac{16}{9}; \frac{8}{9}\right)$.

Третий этап.

Условию задачи удовлетворяет лишь первая пара. Значит, скорость первого пешехода 4 км/ч, а скорость второго — 3,2 км/ч.

7.39. Два поезда отправляются из пунктов A и B навстречу друг другу. Если поезд из A выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из B, то встреча произойдет на середине пути. Если поезда выйдут одновременно, то встретятся через 3 ч 45 мин. Найти скорости поездов и расстояние между A и B, если известно, что скорость одного поезда на 40 км/ч больше скорости другого.

Решение.

x км/ч — скорость первого поезда;

$(x + 40)$ км/ч — скорость второго поезда;

$2y$ км — расстояние между A и B.

Математической моделью задачи служит система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{15x}{4} + \dfrac{15(x+40)}{4} = 2y, \\ \dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x+40} = 2. \end{cases}$$

Ответ: 60 км/ч, 100 км/ч.

7.40. По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадение точек происходит каждый раз через 1 мин. Определить скорости движения точек.

Решение. Пусть x м/с — скорость первой точки, а y м/с — скорость второй точки, причем $x > y$. Так как вторая точка тратит на путь 60 м на 5 с больше, составляем уравнение $\frac{60}{y} - \frac{60}{x} = 5$. Совпадение точек происходит каждый раз через 1 мин. Это значит, что за 60 с первая точка совершит ровно один дополнительный оборот, т. е. пройдет путь на 60 м больше второй: $60x - 60y = 60$.

Математическая модель составлена — это система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{12}{y} - \dfrac{12}{x} = 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем искомые скорости: 4 м/с и 3 м/с.

7.41. Турист проплыл по реке на лодке 90 км и прошел пешком 10 км. При этом на пеший путь было затрачено на 4 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы турист шел пешком столько времени, сколько на самом деле он плыл по реке, а плыл по реке столько времени, сколько на самом деле шел пешком, то соответствующие расстояния были бы равны. Сколько времени он шел пешком и сколько времени он плыл по реке?

Решение. 1. *Составление математической модели.*

x км/ч — скорость пешего туриста;

y км/ч — скорость движения по реке;

$\frac{10}{x}$ ч — время, затраченное на пеший путь;

$\frac{90}{y}$ ч — время, затраченное на водный путь.

Так как на пеший путь было затрачено на 4 ч меньше, чем на путь по реке, составляем первое уравнение:

$$\frac{90}{y} - \frac{10}{x} = 4.$$

Если бы турист шел пешком столько времени, сколько плыл по реке, т. е. $\frac{90}{y}$ ч, то прошел бы путь, равный $x \cdot \frac{90}{y}$ км. Если бы турист плыл по реке столько времени, сколько шел пешком, т. е. $\frac{10}{x}$ ч, то проплыл бы путь, равный $y \cdot \frac{10}{x}$ км. По условию эти новые расстояния равны, значит, составляем второе уравнение:

$$x \cdot \frac{90}{y} = y \cdot \frac{10}{x}.$$

Таким образом получаем математическую модель задачи:

$$\begin{cases} \frac{45}{y} - \frac{5}{x} = 2, \\ \frac{9x}{y} = \frac{y}{x}, \end{cases}$$

где $x > 0$, $y > 0$.

2. *Работа с составленной моделью.*

Решив систему и учтя указанные ограничения на переменные, получим $x = 5$, $y = 15$.

3. *Ответ на вопрос задачи.*

Время, затраченное на пеший путь, выражается формулой $\frac{10}{x}$. Значит, на пеший путь затрачено 2 ч.

Время, затраченное на водный путь, выражается формулой $\frac{90}{y}$. Значит, на водный путь затрачено 6 ч.

7.42. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер прошел 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 ч. Известно, что скорость катера по течению в $\frac{4}{3}$ раза больше скорости катера против течения. На каком расстоянии от A катер встретил плот на обратном пути?

Решение. Если за x км/ч принять скорость катера в стоячей воде, а за y км/ч — скорость течения, то математическая модель задачи составляется без особого труда:

$$\begin{cases} \frac{96}{x + y} + \frac{96}{x - y} = 14, \\ x + y = \frac{4}{3} \cdot (x - y). \end{cases}$$

Решение системы тоже труда не представляет: $x = 14$, $y = 2$. Здесь наиболее интересен третий этап — ответ на вопрос задачи.

96 км по течению катер прошел за 6 ч (скорость катера по течению 16 км/ч). Плот за это время прошел 12 км. Расстояние между катером и плотом в этот момент составляло 84 км. Они пошли навстречу друг другу, один со скоростью 2 км/ч, другой со скоростью 12 км/ч, следовательно, сближались они со скоростью 14 км/ч, поэтому шли до встречи 6 ч. За эти 6 ч плот пройдет еще 12 км, а в итоге он будет находиться от пристани A на расстоянии 24 км.

7.47. В бассейн проведены две трубы разного сечения. Одна равномерно подает, а другая равномерно отводит воду, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $\frac{1}{3}$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

Решение. Если первая труба наполняет бассейн за x ч, а вторая опорожняет его за y ч, то к имеющемуся количеству воды, равному $\frac{1}{3}$ емкости бассейна, за 8 ч нальется $\frac{8}{x}$, а выльется $\frac{8}{y}$ емкости бассейна. Поскольку бассейн в итоге оказывается пустым, то это значит, что $\frac{1}{3} + \frac{8}{x} = \frac{8}{y}$. Второе уравнение очевидно: $x - y = 2$.

Ответ: 8 ч; 6 ч.

7.48. По двум сторонам прямого угла по направлению к его вершине движутся два тела. В начальный момент тело A отстояло от вершины на 60 м, а тело B — на 80 м. Через 3 с расстояние между A и B стало равным 70 м, а еще через 2 с — 50 м. Найти скорости движения каждого тела.

Решение.

x м/с — скорость первого тела;

y м/с — скорость второго тела.

Геометрическая модель состояния процесса движения через 3 с представлена на рис. 29 — это прямоугольный треугольник с катетами $(60 - 3x)$ и $(80 - 3y)$ м и с гипотенузой 70 м. Следовательно,

$$(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2.$$

Геометрическая модель состояния процесса движения через 5 с представлена на рис. 30 — это прямоугольный треугольник

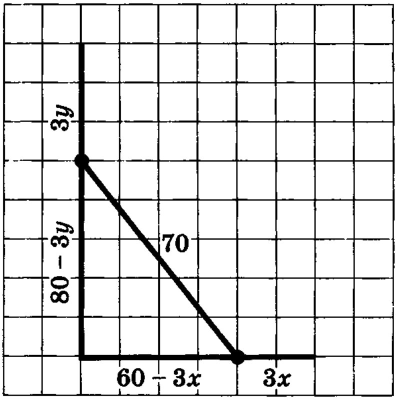


Рис. 29

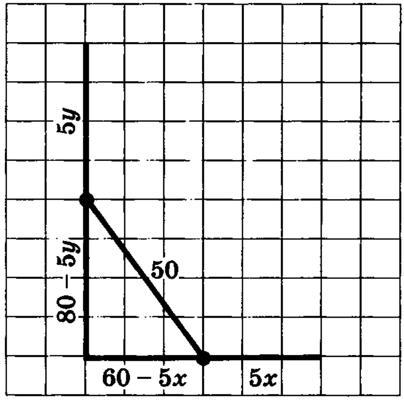


Рис. 30

с катетами $(60 - 5x)$ м и $(80 - 5y)$ м и с гипотенузой 50 м. Значит,

$$(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2.$$

В итоге приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2,\\(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2.\end{cases}$$

Выполнив понятные упрощения, получим:

$$\begin{cases}3x^2 + 3y^2 - 120x - 160y + 1700 = 0,\\x^2 + y^2 - 24x - 32y + 300 = 0.\end{cases}$$

Есть смысл применить метод алгебраического сложения: умножить обе части второго уравнения системы на -3 и полученное уравнение сложить с первым уравнением системы. После преобразований получим достаточно простое уравнение $3x + 4y = 50$, после чего можно использовать метод подстановки: выразить из последнего уравнения x через y и полученное выражение подставить вместо x во второе уравнение системы.

Ответ: 6 м/с; 8 м/с.

7.49. В январе 2006 года на счет в банке была положена некоторая сумма денег. В конце 2006 года проценты по вкладу составили 2000 р. Добавив в январе 2007 года на свой счет еще 18 000 р., вкладчик пришел закрыть счет в декабре 2007 года и получил 44 000 р. Какая сумма была первоначально положена на счет и сколько процентов в год начисляет банк?

Решение. Если первоначальный вклад составлял x р., а банковский процент равен $y\%$, то прибыль за год составит $\frac{y}{100} \cdot x$ р. Значит, $\frac{xy}{100} = 2000$.

В январе 2007 года сумма вклада составила $(x + 2000 + 18\,000)$ р., а в конце года с учетом процентов на счете будет $\left(x + 20\,000 + \frac{y}{100} \cdot (x + 20\,000)\right)$ р., что по условию составляет 44 000 р. Значит, $(x + 20\,000)\left(1 + \frac{y}{100}\right) = 44\,000$.

В итоге получаем математическую модель задачи — систему двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} \frac{xy}{100} = 2000, \\ (x + 20\,000)\left(1 + \frac{y}{100}\right) = 44\,000. \end{cases}$$

Она имеет два решения: (20 000; 10) и (2000; 100). Второе решение не подходит, поскольку в реальности ни один банк не даст 100% годовых.

Ответ: 20 000 р.; 10%.

7.50. У старшего брата было вдвое больше денег, чем у младшего. Они положили свои деньги на год на счета в разные банки, причем младший брат нашел банк, который дает на 5% годовых больше, чем банк старшего брата. Сняв свои деньги со счетов через год, старший брат получил 4600 р., а младший — 2400 р. Сколько денег было бы у братьев в сумме, если бы они с самого начала поменяли свои банки?

Решение. Пусть x р. — сумма денег, которую положил в банк младший брат, тогда $2x$ р. — сумма денег, которую положил в банк старший брат.

Пусть, далее, банк старшего брата дает y% годовых, тогда банк младшего брата дает $(y + 5)$% годовых.

Значит, через год на счету старшего брата будет $\left(2x + 2x \cdot \frac{y}{100}\right)$ р., а на счету младшего брата будет $\left(x + x \cdot \frac{y+5}{100}\right)$ р.

В итоге приходим к системе уравнений (к математической модели ситуации)

$$\begin{cases} 2x + \frac{xy}{50} = 4600, \\ x + \frac{x(y+5)}{100} = 2400. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $x = 2000$, $y = 15$. Второй этап — работа с составленной моделью — завершен.

Осталось получить ответ на вопрос задачи. Спрашивают, сколько денег было бы у братьев в сумме, если бы они с самого начала поменяли свои банки? В этом случае младший брат положил бы свои 2000 р. в банк под 15 % годовых, а старший — 4000 р. в банк под 20 % годовых. Младший брат в конце года получил бы 2300 р., а старший — 4800 р. Всего у них стало бы 7100 р.

Ответ: 7100 р.

7.51. Суммарный доход двух предприятий возрастет втрое, если доход первого предприятия останется неизменным, а доход второго увеличится в 4 раза. Во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя неизменным доход второго, чтобы их суммарный доход вырос в 4 раза?

Решение. Пусть x (у. е.) — доход первого предприятия, а y (у. е.) — доход второго предприятия. Из условия задачи следует, что $x + 4y = 3(x + y)$, откуда получаем, что $y = 2x$.

Пусть k — искомый коэффициент. Тогда $kx + y = 4(x + y)$. Подставив в это уравнение $2x$ вместо y, получим $kx = 10x$, т. е. $k = 10$.

Ответ: в 10 раз.

7.52. Торговая фирма получила две партии некоторого товара. Если продавать весь товар по цене 80 р. за 1 кг, то выручка от продажи будет на 15 % ниже той выручки, которую фирма получила бы, продав первую партию по названной цене, а вторую — по цене, превышающей ее на 25 %. Какую часть (по массе) составляет первая партия товара в общем количестве товара этих двух партий?

Решение. Пусть x кг — масса первой партии, а y кг — масса второй партии товара. Продав весь товар по цене 80 р. за 1 кг, фирма получит выручку, выражающуюся формулой $80x + 80y$. Увеличив цену второй партии товара на 25 %, т. е. доведя ее до 100 р., фирма получит выручку, выражающуюся формулой $80x + 100y$. Согласно условию $80x + 80y = 0{,}85(80x + 100y)$, откуда после упрощений получим $12x = 5y$. Значит, первая партия составляет (по массе) $\frac{5}{12}$ от второй и $\frac{5}{17}$ — от всего товара в целом.

Ответ: $\frac{5}{17}$.

Как видите, задачи № **7.51** и **7.52** были нестандартными; в каждой из них математическая модель представляет собой одно уравнение с двумя переменными, но найти надо не каждую переменную в отдельности, а некоторое их отношение.

7.54. Имеется два раствора соли в воде, первый — 40%-ный, второй — 60%-ный. Их смешали, добавили 5 л воды и получили 20%-ный раствор. Если бы вместо 5 л воды добавили 5 л 80%-ного раствора, то получился бы 70%-ный раствор. Сколько было 40%-ного и сколько 60%-ного раствора?

Решение.

x л — объем 40%-ного раствора;

y л — объем 60%-ного раствора;

$(x + y + 5)$ л — объем 20%-ного раствора.

Поскольку в первом растворе было $0,4x$ кг соли, во втором $0,6y$ кг соли, а в третьем $0,2(x + y + 5)$ кг соли, получим уравнение

$$0,4x + 0,6y = 0,2(x + y + 5).$$

Далее, $(x + y + 5)$ л — объем 70%-ного раствора, соли в нем $0,7(x + y + 5)$ кг. Это складывается из трех частей: $0,4x$ кг соли из первого раствора, $0,6y$ кг соли из второго раствора, $0,8 \cdot 5$ кг, т. е. 4 кг соли из 5 л 80%-ного раствора. Значит,

$$0,4x + 0,6y + 4 = 0,7(x + y + 5).$$

В итоге имеем систему двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y = 0,2(x + y + 5), \\ 0,4x + 0,6y + 4 = 0,7(x + y + 5). \end{cases}$$

Ответ: 1 л; 2 л.

7.55. Имеется три слитка. Масса первого равна 5 кг, масса второго — 3 кг, и каждый из них содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди. Если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Каким будет процентное содержание меди в сплаве из всех трех слитков?

Решение. Первый этап.

Первый слиток имеет массу 5 кг, меди в нем 30%, т. е. 1,5 кг. Второй слиток имеет массу 3 кг, меди в нем тоже 30%, т. е. 0,9 кг. Третий слиток имеет массу x кг, меди в нем y%, т. е. $\frac{xy}{100}$ кг.

Если сплавить первый и третий слитки и подсчитать количество меди, то получим:

$$1,5 + \frac{xy}{100} = 0,56(5 + x).$$

Если сплавить второй и третий слитки и подсчитать количество меди, то получим:

$$0,9 + \frac{xy}{100} = 0,6(3 + x).$$

Математическая модель составлена:

$$\begin{cases} 1{,}5 + \dfrac{xy}{100} = 0{,}56(5 + x), \\ 0{,}9 + \dfrac{xy}{100} = 0{,}6(3 + x). \end{cases}$$

Второй этап.

После понятных упрощений получим:

$$\begin{cases} xy - 56x = 130, \\ xy - 60x = 90. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение системы из первого, находим $x = 10$. Подставив это значение, например, во второе уравнение системы, получим, что $y = 69$.

Третий этап.

Вернемся к исходной задаче и ответим на поставленный вопрос. Имеем

1,5 кг меди в 5 кг первого слитка;

0,9 кг меди в 3 кг второго слитка;

6,9 кг меди в 10 кг третьего слитка.

Соединив три слитка вместе, получим сплав весом 18 кг, в котором меди будет 9,3 кг, что составляет $\dfrac{9{,}3}{18} \cdot 100\%$.

Ответ: $51\frac{2}{3}\%$.

Глава 3

8.37. Построить график функции $y = \sqrt{x - 3} + \sqrt{3 - x} + x$.

Решение. Здесь область определения функции состоит из одной точки $x = 3$. В этой точке функция принимает значение 3. Следовательно, график функции состоит из одной точки (3; 3).

9.19. Построить график функции: а) $y = \sqrt{[x]}$; б) $y = [\sqrt{x}]$.

Решение. а) Если $0 \leqslant x < 1$, то $[x] = 0$, значит, $y = 0$.

Если $1 \leqslant x < 2$, то $[x] = 1$, следовательно, $y = 1$.

Если $2 \leqslant x < 3$, то $[x] = 2$, значит, $y = \sqrt{2}$.

Аналогично, если $3 \leqslant x < 4$, то $y = \sqrt{3}$; если $4 \leqslant x < 5$, то $y = \sqrt{4}$, т. е. $y = 2$ и т. п. График функции изображен на рис. 31.

б) Если $0 \leqslant x < 1$, то $0 \leqslant \sqrt{x} < 1$, $[\sqrt{x}] = 0$, следовательно, $y = 0$.

Если $1 \leqslant x < 4$, то $1 \leqslant \sqrt{x} < 2$, $[\sqrt{x}] = 1$, значит, $y = 1$.

Если $4 \leqslant x < 9$, то $2 \leqslant \sqrt{x} < 3$, $[\sqrt{x}] = 2$, следовательно, $y = 2$.

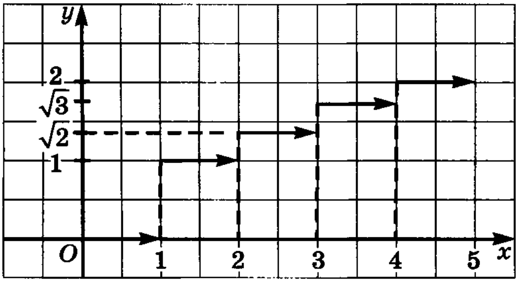


Рис. 31

Аналогично, если $9 \leqslant x < 16$, то $y = 3$, если $16 \leqslant x < 25$, то $y = 4$ и т. д. График функции изображен на рис. 32 (масштабы на осях различны).

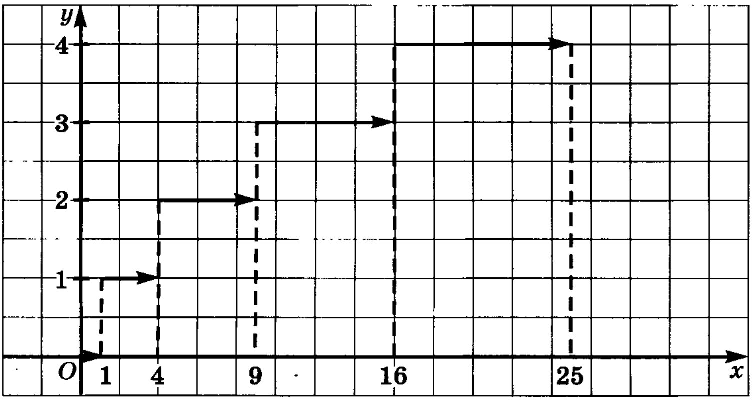


Рис. 32

10.19. а) Доказать, что функция $y = \dfrac{x-5}{x+3}$, $x > -3$, возрастает.

Решение. Пусть $x_1 > x_2 > -3$. Тогда

$$f(x_1) = \frac{x_1 - 5}{x_1 + 3},\ f(x_2) = \frac{x_2 - 5}{x_2 + 3};$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1 - 5}{x_1 + 3} - \frac{x_2 - 5}{x_2 + 3} = \frac{8(x_1 - x_2)}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)}.$$

Здесь все множители положительны, следовательно, $f(x_1) > f(x_2)$, а это и означает возрастание функции на заданном промежутке.

10.24. б) Построить график функции $y = \dfrac{2-3x}{2+x}$, $x < -2$.

Решение. Имеем:

$$\frac{2-3x}{2+x} = \frac{-3(2+x)+8}{2+x} = \frac{8}{2+x} - 3.$$

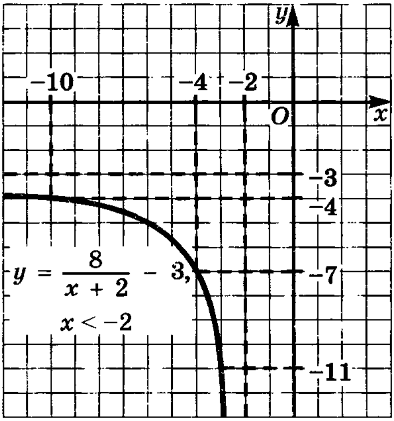


Рис. 33

Итак, требуется построить левую ветвь гиперболы с асимптотами $y = -3$ и $x = -2$ и коэффициентом обратной пропорциональности $k = 8$ (рис. 33).

10.25. Исследовать функцию на ограниченность:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$;

б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$;

в) $y = \sqrt{3 - x^2 - 2x}$;

г) $y = \dfrac{-1}{\sqrt{3 - x^2 - 2x}}$.

Решение. а) Здесь $D(f) = (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$. В этой области очевидно выполняется неравенство $y \geqslant 0$, т. е. функция ограничена снизу. Докажем, что сверху она не ограничена. Возьмем произвольное число $M > 0$. Представим заданное выражение в виде $\sqrt{(x-3)^2 - 1}$ и возьмем $x = M + 4$. Получим: $\sqrt{(M+4-3)^2 - 1} = \sqrt{M^2 + 2M} > \sqrt{M^2} = M$.

Итак, мы нашли точку $x = M + 4$, в которой значение функции больше числа M, а это и означает неограниченность функции сверху (для любого $M > 0$ существует $x \in D(f)$ такое, что $f(x) > M$).

б) Здесь $D(f) = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. В этой области очевидно выполняется неравенство $y > 0$, т. е. функция ограничена снизу. Докажем, что сверху она не ограничена. Возьмем произвольное число $M > 0$. Представим заданное выражение в виде $\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)(x-4)}}$. Можно найти число $a > 4$, настолько близкое к числу 4, что будет выполняться неравенство $(a-2)(a-4) < \dfrac{1}{M^2}$.

Тогда $\sqrt{(a-2)(a-4)} < \dfrac{1}{M}$, а $\dfrac{1}{\sqrt{(a-2)(a-4)}} > M$.

Итак, мы нашли точку $x = a$, в которой значение функции больше числа M, а это и означает неограниченность функции сверху.

в) Здесь $D(f) = [-3; 1]$. В этой области очевидно выполняется неравенство $y \geqslant 0$, т. е. функция ограничена снизу. Докажем, что она ограничена и сверху. Представим заданное выражение в виде $\sqrt{4 - (x+1)^2}$. Ясно, что $4 - (x+1)^2 \leqslant 4$, а потому $\sqrt{4 - (x+1)^2} \leqslant 2$. Полученное неравенство означает ограниченность функции сверху в ее области определения.

г) Здесь $D(f) = (-3;\ 1)$. В этой области очевидно выполняется неравенство $y < 0$, т. е. функция ограничена сверху. Рассуждая далее, как в пункте б), приходим к выводу, что функция не ограничена снизу.

10.28. Найти промежутки монотонности функции $y = f(x)$ и сравнить $f(a)$ и $f(b)$, если: в) $f(x) = 1{,}9x^2 + 5{,}7x + 4$; $a = -5{,}2$, $b = -2{,}2$; г) $f(x) = -3{,}3x^2 + 3{,}3x$; $a = 0{,}55$, $b = 0{,}53$.

Р е ш е н и е. в) Графиком функции является парабола, абсцисса ее вершины вычисляется по формуле $x = \dfrac{-5{,}7}{2 \cdot 1{,}9} = -1{,}5$. Ветви параболы направлены вверх, значит, функция на луче $(-\infty;\ -1{,}5]$ убывает, а потому $f(a) > f(b)$.

г) Здесь также графиком функции является парабола, абсцисса ее вершины вычисляется по формуле $x = \dfrac{-3{,}3}{2 \cdot (-3{,}3)} = 0{,}5$. Ветви параболы направлены вниз, значит, функция на луче $[0{,}5;\ +\infty)$ убывает, а потому $f(a) < f(b)$.

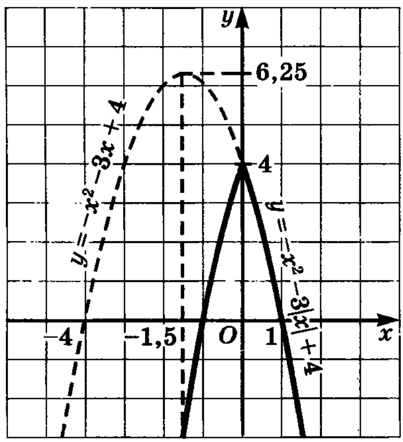


Рис. 34

В следующих упражнениях требуется исследовать функцию на четность и построить ее график.

11.31. в) $y = -x^2 - 3|x| + 4$.

Р е ш е н и е. Это четная функция, поэтому достаточно построить часть графика при $x \geqslant 0$, а затем добавить ее симметричный образ относительно оси ординат. Для построения параболы $y = -x^2 - 3x + 4$ есть смысл взять точки ее пересечения с осью абсцисс, т. е. в данном случае точки $(-4; 0)$ и $(1; 0)$, вершину параболы $(-1{,}5;\ 6{,}25)$, а также точку $(0;\ 4)$. Требуемый график представлен на рис. 34.

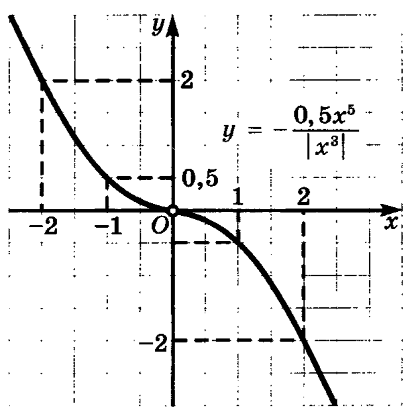


Рис. 35

11.32. г) $y = -\dfrac{0{,}5x^5}{|x^3|}$.

Р е ш е н и е. Это нечетная функция, поэтому достаточно построить часть графика при $x > 0$, а затем добавить ее симметричный образ относительно начала координат. Если $x > 0$, то получаем $y = -0{,}5x^2$. Значит,

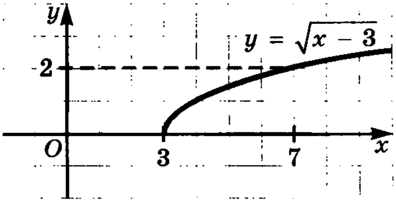


Рис. 36

требуемый график — это правая ветвь параболы $y = -0{,}5x^2$ без ее вершины (поскольку должно выполняться условие $x \neq 0$) плюс ее симметричное отображение относительно начала координат (рис. 35).

11.33. г) $y = \sqrt{|x| - 3}$.

Р е ш е н и е. Это четная функция, поэтому сначала построим график функции $y = \sqrt{x-3}$ (рис. 36), а затем добавим ветвь, симметричную построенной относительно оси ординат (рис. 37).

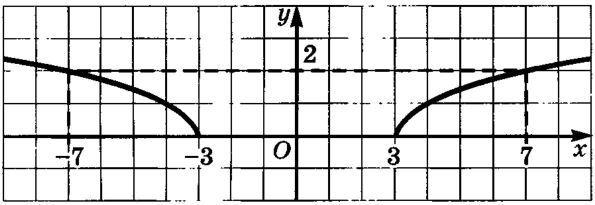


Рис. 37

11.34. а) $y = \sqrt{(|x| - 3)^2} - 4$; б) $y = \sqrt{4 - x^2} + 1$.

Р е ш е н и е. а) Речь идет о построении графика четной функции $y = ||x| - 3| - 4$. Если $x \geqslant 0$, то функция принимает вид $y = |x - 3| - 4$, для построения ее графика достаточно «привязать» график функции $y = |x|$ к системе координат с вершиной в точке $(3; -4)$ (рис. 38). Затем к той части построенного графика, что расположена в правой полуплоскости, добавим часть, симметричную ей относительно оси ординат (рис. 39).

б) Выполним некоторые преобразования:

$$y - 1 = \sqrt{4 - x^2}; \ \ (y-1)^2 = 4 - x^2; \ \ x^2 + (y-1)^2 = 4.$$

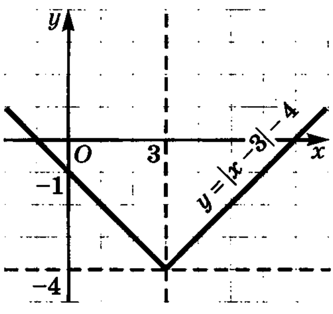


Рис. 38

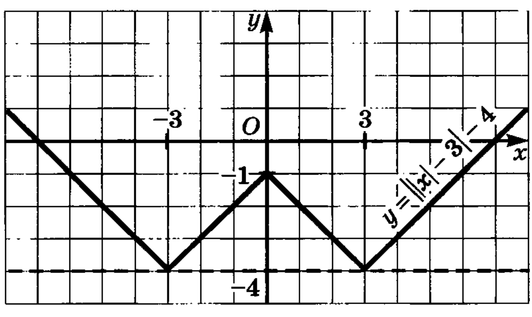


Рис. 39

Это уравнение окружности с центром в точке (0; 1) и радиусом 2. Из условия следует, что речь идет о верхней полуокружности (рис. 40).

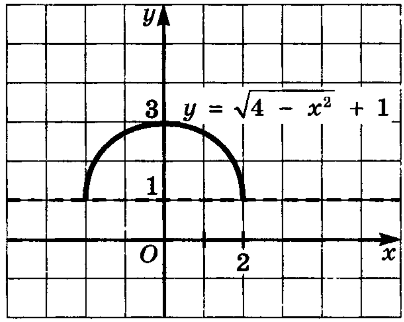


Рис. 40

12.33. Доказать, что уравнение не имеет корней:

в) $x^4 + x^2 - 2x + 3 = 0$.

Решение. **I способ.** Преобразуем уравнение к виду

$$x^4 = -x^2 + 2x - 3.$$

Графики функций $y = x^4$ и $y = -x^2 + 2x - 3$ не пересекаются (рис. 41), следовательно, уравнение не имеет корней.

II способ. Преобразуем уравнение к виду

$$x^4 + (x - 1)^2 + 2 = 0.$$

Теперь очевидно, что левая часть уравнения положительна при всех значениях x, значит, уравнение не имеет корней.

12.37. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = -x^3$. Доказать, что

$$(f(x))^9 : f(-0{,}5x^4) = f(2x^5).$$

Решение. Имеем:

$$f(x) = -x^3;\ \ f(-0{,}5x^4) = -(-0{,}5x^4)^3 = \frac{x^{12}}{8};$$

$$f(2x^5) = -(2x^5)^3 = -8x^{15}.$$

Следовательно,

$$(f(x))^9 : f(-0{,}5x^4) = (-x^3)^9 : \frac{x^{12}}{8} =$$

$$= -8x^{15} = f(2x^5).$$

13.25. Даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{-4}$. Доказать, что

$$\frac{16}{f(x^2)} = \left(g\left(\frac{2}{x}\right)\right)^{-1}.$$

Решение.

$$f(x^2) = (x^2)^2 = x^4;\ \frac{16}{f(x^2)} = \frac{16}{x^4};$$

$$g\left(\frac{2}{x}\right) = \left(\frac{2}{x}\right)^{-4} = \frac{x^4}{16};$$

$$\left(g\left(\frac{2}{x}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{-1} = \frac{16}{x^4}.$$

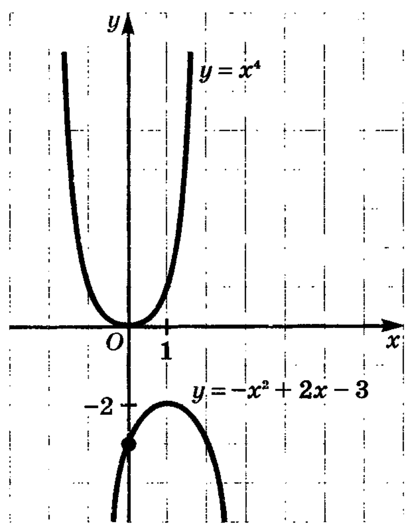


Рис. 41

Значит, $\frac{16}{f(x^2)} = \left(g\left(\frac{2}{x}\right)\right)^{-1}$.

14.26. Построить график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+4)^2, \text{ если } -6 \leqslant x \leqslant -2; \\ x^3, \text{ если } -2 < x < 0; \\ \sqrt[3]{x}, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 8. \end{cases}$$

При каком значении параметра p уравнение $f(x) = p$ имеет:

а) два корня; б) три корня; в) четыре корня; г) не имеет корней?

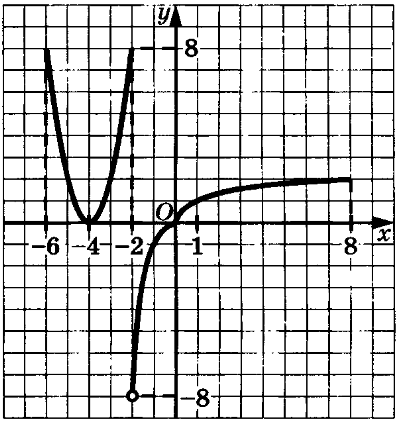


Рис. 42

Решение. На рис. 42 представлен график заданной кусочной функции. Ответить на заданный вопрос можно, установив, сколько точек пересечения имеет построенный график с прямой $y = p$, параллельной оси абсцисс.

а) Уравнение имеет два корня при $2 < p \leqslant 8$, а также при $p = 0$;

б) уравнение имеет три корня при $0 < p \leqslant 2$ (рис. 43);

в) четырех корней нет ни при каких значениях параметра;

г) уравнение не имеет корней при $p > 8$ и при $p \leqslant -8$ (рис. 44).

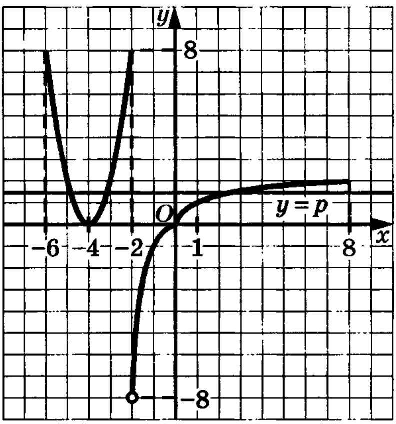


Рис. 43

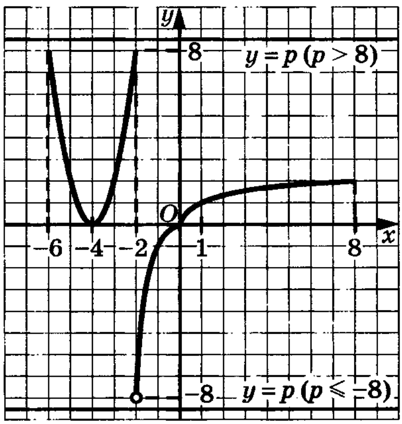


Рис. 44

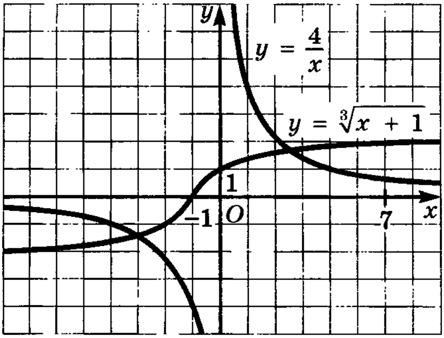


Рис. 45

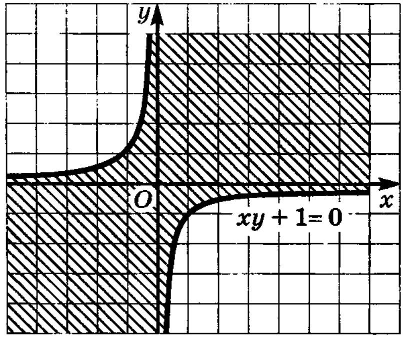


Рис. 46

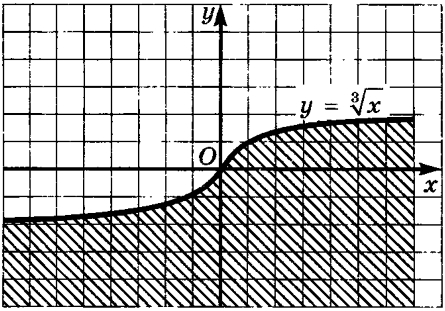


Рис. 47

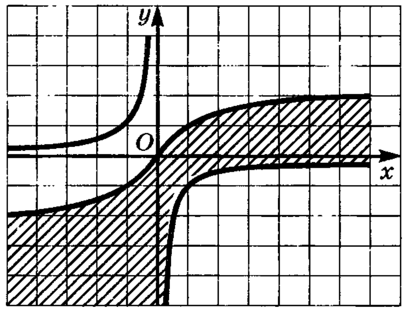


Рис. 48

14.27. в) Построить график уравнения $\left(\sqrt[3]{x+1} - y\right)(xy - 4) = 0$.

Решение. Речь идет об объединении графиков функций $y = \sqrt[3]{x+1}$ и $y = \frac{4}{x}$.

График уравнения изображен на рис. 45.

14.28. б) Решить графически систему неравенств $\begin{cases} xy + 1 \geqslant 0, \\ y - \sqrt[3]{x} \leqslant 0. \end{cases}$

Решение. На рис. 46 представлено графическое решение неравенства $xy + 1 \geqslant 0$. На рис. 47 представлено графическое решение неравенства $y \leqslant \sqrt[3]{x}$. На рис. 48 представлено графическое решение заданной системы неравенств.

Глава 4

16.56. г) Указать наименьший номер, начиная с которого все члены заданной арифметической прогрессии (a_n) будут меньше заданного числа A:

$$a_n = 15\sqrt{2} - n\left(\sqrt{2} - 1\right), \; A = -1.$$

Решение. Прежде всего следует обсудить с учащимися вопрос о том, почему в условии задачи речь идет не о произвольной числовой последовательности (что в принципе было бы правильным), а именно об арифметической прогрессии. Дело в том, что если последовательность (a_n) представляет собой линейную функцию натурального аргумента, т. е. $a_n = kn + m$, то (a_n) — арифметическая прогрессия, об этом сказано в учебнике.

В данном примере сначала следует решить неравенство $15\sqrt{2} - n(\sqrt{2} - 1) < -1$. Последовательно получаем:

$$n(\sqrt{2} - 1) > 15\sqrt{2} + 1; \; n(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) > (15\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1);$$

$$n > 31 + 16\sqrt{2}.$$

Нас интересует наименьший номер, начиная с которого выполняется требуемое неравенство. Это значит, что нужно указать наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $n > 31 + 16\sqrt{2}$, т. е. неравенству $n > 31 + \sqrt{512}$. Замечаем, что $22 < \sqrt{512} < 23$. Значит, 23 — первое натуральное число, которое больше $\sqrt{512}$, а 54 — первое натуральное число, которое больше $31 + \sqrt{512}$.

Ответ: 54.

16.57. в) Указать наименьший номер, начиная с которого все члены заданной арифметической прогрессии (a_n) будут больше заданного числа A: $a_n = 5n - 17{,}7$, $A = 2 + 3\sqrt{5}$.

Решение.

$$5n - 17{,}7 > 2 + 3\sqrt{5}; \; 5n > 19{,}7 + 3\sqrt{5}; \; 5n > 19{,}7 + \sqrt{45}.$$

Сделаем соответствующие оценки:

$$6 < \sqrt{45} < 7; \; 25{,}7 < 19{,}7 + \sqrt{45} < 26{,}7.$$

Отсюда следует, что первым натуральным числом вида $5n$, которое будет больше, чем $19{,}7 + \sqrt{45}$, является 30; значит, нас устраивает то натуральное число n, которое удовлетворяет соотношению $5n = 30$.

Ответ: 6.

16.59. а) Найти сумму всех трехзначных чисел, которые делятся на 7 и не делятся на 13.

б) Найти сумму всех трехзначных чисел, которые не делятся ни на 7, ни на 13.

Решение. а) Обозначим через S_1 сумму трехзначных чисел, кратных 7:

$$S_1 = 105 + 112 + \ldots + 994 = 7(15 + 16 + \ldots + 142) =$$

$$= 7 \cdot \frac{15 + 142}{2} \cdot 128 = 70\,336.$$

На 7 и на 13 одновременно делятся числа, кратные 91, сумму этих чисел нужно вычесть из полученной суммы. Обозначим через S_2 сумму трехзначных чисел, кратных 91:

$$S_2 = 182 + \ldots + 910 = 91(2 + 3 + \ldots + 10) = 91 \cdot 54 = 4914.$$

Искомая сумма $S = 70\,336 - 4914 = 65\,422$.

б) Здесь нужно из суммы P всех трехзначных чисел отнять сумму S_1 чисел, кратных 7, и сумму S_3 чисел, кратных 13. Поскольку при этом сумма S_2 чисел, кратных 91, вычитается дважды, одну из этих сумм надо восстановить.

Имеем $P = 100 + 101 + \ldots + 999 = \dfrac{100 + 999}{2} \cdot 900 = 494\,550.$

$$S_1 = 70\,336;\ S_2 = 4914 \text{ (см. пункт а))};$$

$$S_3 = 104 + 117 + \ldots + 988 = 13(8 + 9 + \ldots + 76) =$$

$$= 13 \cdot \frac{8 + 76}{2} \cdot 69 = 37\,674.$$

$$S = P - S_1 - S_3 + S_2 =$$

$$= 494\,550 - 70\,336 - 37\,674 + 4914 = 391\,454.$$

Ответ: а) 65 422; б) 391 454.

16.68. Найти те значения x, при которых числа $x - 4$, $\sqrt{x - 3}$, $x - 6$ образуют конечную арифметическую прогрессию.

Решение. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, получаем уравнение

$$2\sqrt{x - 3} = (x - 4) + (x - 6).$$

Решая его, последовательно находим:

$$\sqrt{x - 3} = x - 5;\ x - 3 = (x - 5)^2;\ x_1 = 7,\ x_2 = 4.$$

Второй из найденных корней — посторонний, он не удовлетворяет иррациональному уравнению.

Ответ: 7.

16.69. Доказать, что если числа $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ образуют конечную арифметическую прогрессию, то верно равенство: а) $ab + bc + ac = 3ac$; б) $\dfrac{b}{c} + \dfrac{b}{a} = 2$.

Решение. а) Если числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ образуют конечную арифметическую прогрессию, то верно равенство $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ (характеристическое свойство). Значит, $2ac = bc + ab$, а потому $ab + bc + ac = 3ac$.

б) Умножив обе части равенства $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ на b, получим: $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2$.

16.70. Доказать, что если числа $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{c+b}$ образуют конечную арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 также образуют конечную арифметическую прогрессию.

Решение. Так как заданные числа образуют конечную арифметическую прогрессию, то согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии справедливо равенство

$$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b}.$$

Освободившись от знаменателей, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получаем:

$$2b^2 = a^2 + c^2.$$

Последнее равенство, согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии, означает, что числа a^2, b^2, c^2 образуют конечную арифметическую прогрессию.

17.50. Доказать, что в конечной геометрической прогрессии, имеющей четное число членов, отношение суммы членов, стоящих на четных местах, к сумме членов, стоящих на нечетных местах, равно знаменателю прогрессии.

Решение. Дана геометрическая прогрессия

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_{2n-1}, b_{2n}.$$

Обозначим S сумму членов прогрессии, находящихся на четных местах:

$$S = b_2 + b_4 + \ldots + b_{2n}.$$

Имеем:

$$S = b_1q + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{2n-1} = b_1q(1 + q^2 + \ldots + q^{2n-2}).$$

Обозначим P сумму членов прогрессии, находящихся на нечетных местах:

$$P = b_1 + b_3 + \ldots + b_{2n-1}.$$

Имеем:

$$P = b_1 + b_1q^2 + ... + b_1q^{2n-2} = b_1(1 + q^2 + ... + q^{2n-2}).$$

Разделив S на P, получим q, что и требовалось доказать.

Упражнения № 17.53—17.56 — это серия смешанных задач на прогрессии, т. е. задач, в условии которых фигурируют и арифметическая, и геометрическая прогрессии. Сделаем несколько рекомендаций по оформлению их решения.

1) Если исходные числа образуют в целом конечную арифметическую прогрессию, то предпочтительно обозначить их a_1, a_2, a_3, a_4.

2) Если исходные числа образуют в целом конечную геометрическую прогрессию, то предпочтительно обозначить их b_1, b_2, b_3, b_4.

3) Если исходные числа в целом не образуют никакой прогрессии, то предпочтительно ввести нейтральные обозначения $x, y, z, ...$ (такие задачи обычно приводят к системе с тремя-четырьмя переменными; естественно, в задачнике для 9 класса общеобразовательной школы таких задач нет).

4) Основой для составления уравнений в смешанных задачах служат характеристические свойства прогрессий.

17.53. Три числа составляют конечную геометрическую прогрессию. Если из последнего числа вычесть 16, то получится конечная арифметическая прогрессия. Найти два последних числа, если первое равно 9.

Решение. Имеем:

$$\div\div\, b_1, b_2, b_3;$$

$$\div\, b_1, b_2, b_3 - 16;$$

$$b_1 = 9.$$

Опираясь на характеристическое свойство арифметической прогрессии, получаем:

$$2b_2 = b_1 + (b_3 - 16);$$

$$2b_1q = b_1 + b_1q^2 - 16;\ 18q = 9 + 9q^2 - 16.$$

Решив это уравнение, находим: $q_1 = \frac{7}{3}$, $q_2 = -\frac{1}{3}$.

Если $q = \frac{7}{3}$, то $b_2 = b_1q = 9 \cdot \frac{7}{3} = 21$; $b_3 = b_2q = 21 \cdot \frac{7}{3} = 49$.

Если $q = -\frac{1}{3}$, то $b_2 = b_1q = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -3$; $b_3 = b_2q = (-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$.

Ответ: 21 и 49 или −3 и 1.

17.54. Сумма трех чисел, составляющих конечную арифметическую прогрессию, равна 24. Если второе увеличить на 1, а последнее — на 14, то получится конечная геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

Решение. Имеем:

$$\div\, a_1, a_2, a_3;$$
$$\div\div\, a_1, a_2 + 1, a_3 + 14;$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 24.$$

Опираясь на характеристическое свойство геометрической прогрессии, получаем:

$$(a_2 + 1)^2 = a_1 \cdot (a_3 + 14);$$
$$(a_1 + d + 1)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 2d + 14);\ d^2 + 2d + 1 = 12a_1.$$

Теперь поработаем с третьим условием задачи:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 24;$$
$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 24;$$
$$a_1 + d = 8.$$

В итоге имеем систему уравнений

$$\begin{cases} d^2 + 2d + 1 = 12a_1, \\ a_1 + d = 8. \end{cases}$$

Ответ: 27, 8, −11 или 3, 8, 13.

17.55. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим числам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующих конечную убывающую арифметическую прогрессию. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

Решение. Имеем:

$$\div\div\, b_1, b_2, b_3;$$
$$\div\, b_1 + 25, b_2 + 27, b_3 + 1;$$
$$b_1 + b_2 + b_3 = 91.$$

Опираясь на характеристическое свойство арифметической прогрессии, получаем:

$$2(b_2 + 27) = (b_1 + 25) + (b_3 + 1);$$
$$2(b_1q + 27) = (b_1 + 25) + (b_1q^2 + 1);\ b_1(1 - 2q + q^2) = 28.$$

Теперь поработаем с третьим условием задачи:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 91;\ b_1(1 + q + q^2) = 91.$$

В итоге имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1(1 - 2q + q^2) = 28, \\ b_1(1 + q + q^2) = 91. \end{cases}$$

Воспользовавшись методом деления (или, что практически то же самое, методом подстановки), получим:

$$\frac{b_1(1 - 2q + q^2)}{b_1(1 + q + q^2)} = \frac{28}{91};$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0;$$

$$q_1 = 3, \ q_2 = \frac{1}{3}.$$

В первом случае имеем $b_1 = 7$, первые три члена геометрической прогрессии равны соответственно 7, 21, 63, а соответствующие члены арифметической прогрессии — 32, 48, 64. Это нас не устраивает, так как по условию арифметическая прогрессия должна быть убывающей.

Во втором случае имеем $b_1 = 63$, первые три члена геометрической прогрессии равны соответственно 63, 21, 7, а соответствующие члены арифметической прогрессии — 88, 48, 8. Это нас устраивает.

Итак, $b_1 = 63$, $q = \frac{1}{3}$, следовательно, $b_7 = b_1q^6 = 63 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{7}{81}$.

17.56. Три числа, сумма которых равна 31, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как первый, второй и седьмой члены арифметической прогрессии. Найти эти числа.

Решение. Имеем:

$$\div\, a_1, a_2, a_7; \ a_1 + a_2 + a_7 = 31.$$

Поработаем с первым условием:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_7; \ (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 6d).$$

Поработаем со вторым условием:

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 6d) = 31; \ 3a_1 + 7d = 31.$$

В итоге получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 6d), \\ 3a_1 + 7d = 31. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{31}{3}, \frac{31}{3}, \frac{31}{3}$ или 1, 5, 25.

17.57. На биржевых торгах в понедельник вечером цена акции банка «Городской» повысилась на некоторое количество процентов, а во вторник произошло снижение стоимости акции на то же число процентов. В результате во вторник вечером цена акции составила 99% ее первоначальной цены в понедельник утром. На сколько процентов менялась котировка акции в понедельник и во вторник?

Решение. Обозначим искомое число процентов буквой x, а стоимость акции в понедельник утром (в условных единицах) буквой y. Цена акции после повышения составит $\left(y + \frac{x}{100}y\right)$ у. е. После понижения этой цены на то же число процентов цена акции будет составлять $\left(y + \frac{x}{100}y\right) - \frac{x}{100}\left(y + \frac{x}{100}y\right)$ у. е. По условию эта новая цена составляет 99% от первоначальной, т. е. $0{,}99y$. В итоге получаем уравнение с двумя переменными:

$$\left(y + \frac{x}{100}y\right) - \frac{x}{100}\left(y + \frac{x}{100}y\right) = 0{,}99y.$$

Разделив обе части этого уравнения на y (это сделать можно, поскольку ясно, что $y \neq 0$) и умножив на 100, получим:

$$100 + x - x\left(1 + \frac{x}{100}\right) = 99; \ \frac{x^2}{100} = 1; \ x = 10.$$

Ответ: на 10%.

17.58. В результате трехкратного повышения цены на некоторый товар на одно и то же число процентов цена товара стала превышать первоначальную цену на 72,8%. На сколько процентов повышалась цена на товар каждый раз?

Решение. Обозначим искомое число процентов буквой x, а первоначальную цену на товар (в условных единицах) буквой y. Цена товара после первого повышения составит $\left(y + \frac{x}{100}y\right)$ у. е. После второго повышения цена товара будет составлять

$$\left(y + \frac{x}{100}y\right) + \frac{x}{100}\left(y + \frac{x}{100}y\right) = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 y \text{ у. е.}$$

После третьего повышения цены получим:

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 y + \frac{x}{100}\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 y = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 y \text{ у. е.}$$

По условию эта новая цена составляет 172,8% от первоначальной, т. е. $1{,}728y$. В итоге получаем уравнение с двумя переменными

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 y = 1{,}728y.$$

Далее имеем $1 + \frac{x}{100} = \sqrt[3]{1{,}728}$; $1 + \frac{x}{100} = 1{,}2$; $x = 20$.

Ответ: на 20%.

18.19. В таблице собрана информация о выходе новостей на четырех телеканалах.

	1-й выпуск	2-й выпуск и далее
Канал № 1 (федеральный)	6-00	9-00 и далее через каждые 3 часа
Канал № 2 (федеральный)	8-00	11-00 и далее через каждые 3 часа
Канал № 3 (региональный)	6-00	10-00 и далее через каждые 4 часа
Канал № 4 (городской)	9-30	11-30 и далее через каждые 2 часа

Вы хотите выбрать один выпуск новостей. Нарисуйте дерево возможных вариантов выбора в период:

а) с 6-00 до 11-45; г) с 18-00 до 23-45.

Решение. а) Сначала выбираем канал. Есть четыре возможности. Если выбран канал № 1, то в промежуток с 6-00 до 11-45 есть две возможности посмотреть новости: в 6-00 и в 9-00. Если выбран канал № 2, то в это время также есть две возможности посмотреть новости: в 8-00 и в 11-00. Аналогично и для двух других каналов. Получается такое дерево вариантов (рис. 49).

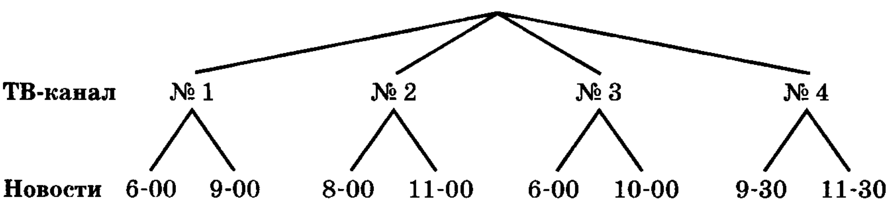


Рис. 49

г) См. рис. 50.

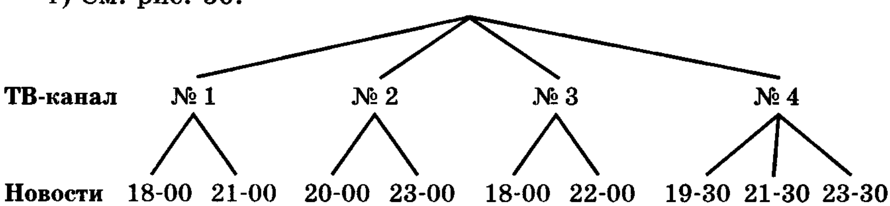


Рис. 50

18.20. Учительница подготовила к контрольной работе четыре задачи на решение линейных неравенств, пять текстовых задач (две на движение и три на работу) и шесть задач на решение квадратных уравнений (в двух задачах дискриминант отрицателен). В контрольной должно быть по одной задаче на каждую из трех тем. Найти общее число:

а) всех возможных вариантов контрольной;

б) тех возможных вариантов, в которых встретится задача на движение;

в) тех возможных вариантов, в которых у квадратного уравнения будет хотя бы один корень;

г) тех возможных вариантов, в которых не встретятся одновременно задача на работу и квадратное уравнение, не имеющее корней.

Решение. а) При выборе неравенства есть 4 исхода, при выборе текстовой задачи есть 5 исходов, а при отборе квадратного уравнения есть 6 исходов. По правилу умножения получаем, что число всех вариантов контрольной работы равно $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

б) В предыдущем рассуждении меняется число исходов при выборе текстовой задачи: их всего две. Значит, таких контрольных можно составить $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$.

в) По сравнению с пунктом а) меняется число исходов при выборе уравнения: только в четырех случаях корни есть. Значит, таких контрольных можно составить $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$.

г) Из общего числа вариантов (120) мы вычтем те варианты, в которых встретятся одновременно и задача на работу, и квадратное уравнение, не имеющее корней. По сравнению с пунктом а) для них меняется число исходов при выборе текстовой задачи (3 варианта) и число исходов при выборе уравнения: только в двух случаях корней нет. Значит, таких контрольных можно составить $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, а количество интересующих нас вариантов равно $120 - 24 = 96$.

Ответ: а) 120; б) 48; в) 80; г) 96.

18.22. Известно, что $x = 2^a 3^b 5^c$ и a, b, c — различные числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

а) Найти наименьшее и наибольшее значения числа x.

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

в) Сколько среди них будет нечетных чисел?

г) Сколько среди них будет чисел, кратных 12?

Решение. По сравнению с задачей № **18.10** тут основная сложность состоит в том, что $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

а) $m = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$ — наименьшее значение, а $M = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 2250$ — наибольшее значение.

б) Показатель степени a можно выбрать любым из $\{0, 1, 2, 3\}$, т. е. выбрать четырьмя способами. Если a уже выбрано, то показатель степени b можно выбрать только тремя способами: ведь $a \neq b$, а a уже выбрано, т. е. одно место во множестве $\{0, 1, 2, 3\}$ уже «занято». Аналогично, если a и b уже выбраны, то для выбора c есть две возможности: те, что остались от $\{0, 1, 2, 3\}$ после выбора a и b. Всего получаем $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ различных варианта значений x.

в) Число x нечетно тогда и только тогда, когда $a = 0$, т. е. выбор a единственный. Выбор b и c проводится так же, как и в пункте б). Получаем $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ нечетных чисел.

г) Число x кратно 12 тогда и только тогда, когда x кратно 4 и x кратно 3, т. е. когда $a \geqslant 2$ и $b > 0$. Нарисуем дерево вариантов (рис. 51).

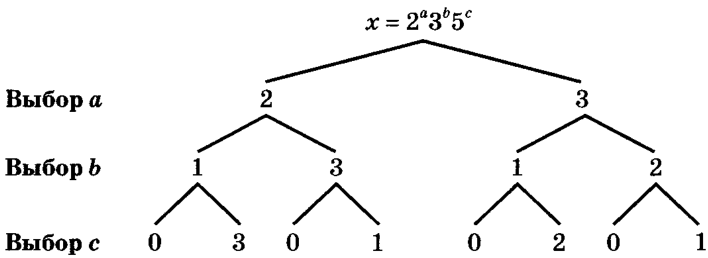


Рис. 51

Всего $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ чисел x, кратных 12.

Ответ: а) 12 и 2250; б) 24; в) 6; г) 8.

18.25. Упростить выражение:

а) $\dfrac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!}$; в) $\dfrac{25m^5 - m^3}{(5m+1)!} \cdot \left(\dfrac{1}{5 \cdot (5m-2)!}\right)^{-1}$;

б) $\dfrac{1}{(n-2)!} - \dfrac{n^3-n}{(n+1)!}$; г) $\dfrac{(3k+3)! \cdot k!}{(3k)!} : \dfrac{(k+3)!(3k+1)}{3!(k^2+5k+6)}$.

Решение. а) $\dfrac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!} =$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)(n+2)(n-3)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{n-3}{n+4}$$

(числитель и знаменатель сократили на $(n+3)!$).

б) Так как $(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1) \cdot n \cdot (n+1) = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$,

то

$$\frac{1}{(n-2)!} - \frac{n^3-n}{(n+1)!} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1) - (n^3-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{n(n^2-1) - (n^3-n)}{(n+1)!} = 0.$$

в) Так как

$$(5m+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (5m-2)(5m-1) \cdot 5m \cdot (5m+1) =$$
$$= (5m-2)! \cdot (5m-1) \cdot 5m \cdot (5m+1),$$

то

$$\frac{25m^5 - m^3}{(5m+1)!} \cdot \left(\frac{1}{5 \cdot (5m-2)!}\right)^{-1} = \frac{m^3(25m^2-1)}{(5m+1)!} \cdot 5 \cdot (5m-2)! =$$
$$= \frac{m^3(5m-1)\cdot(5m+1)\cdot 5}{(5m-1)\cdot 5m \cdot (5m+1)} = m^2.$$

г) $\dfrac{(3k+3)! \cdot k!}{(3k)!} : \dfrac{(k+3)! \cdot (3k+1)}{3! \cdot (k^2+5k+6)} =$

$$= \frac{(3k)! \cdot (3k+1)(3k+2)(3k+3)k! \cdot 6 \cdot (k+2)(k+3)}{(3k)! \cdot k! \cdot (k+1)(k+2)(k+3)(3k+1)} = 18(3k+2).$$

Ответ: а) $\dfrac{(n-3)}{(n+4)}$; б) 0; в) m^2; г) $18(3k+2)$.

19.13. В сводной таблице распределения данных некоторого измерения оказались пустые места. Заполнить их.

	Варианта						Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	
Кратность	291		113				
Частота		0,122				0,193	
Частота, %	29,1			20,2	7,9		

Решение.

Начнем с первого столбца: только в нем две клетки из трех уже заполнены. Так как частота в процентах равна 29,1, то частота равна 0,291. Так как частота $= \dfrac{\text{кратность}}{\text{объем}}$, то $0{,}291 = \dfrac{291}{\text{объем}}$.

Поэтому всего было произведено $N = 1000$ данных.

Во втором столбце в нижней клетке стоит $0{,}122 \cdot 100\,\% = 12{,}2$, а в верхней клетке — $0{,}122 \cdot N = 122$. В третьем столбце в средней клетке стоит $\dfrac{113}{1000} = 0{,}113$, а в нижней клетке — 11,3 %.

Продолжая, получим полную информацию о таблице.

О т в е т:

	Варианта						Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	
Кратность	291	122	113	202	79	193	1000
Частота	0,291	0,122	0,113	0,202	0,079	0,193	1
Частота, %	29,1	12,2	11,3	20,2	7,9	19,3	100

19.17. После урока по теме «Статистика» на доске осталась таблица

Варианта	4	7	
Кратность	5	2	3

и ответ: «Среднее значение = 10».

а) Заполнить пустое место в таблице.

б) Указать размах и моду распределения.

в) Может ли в ответе для среднего значения стоять число 15, если все варианты — целые числа?

г) Заполнить пустое место в таблице, если в ответе для среднего значения стоит число x.

Р е ш е н и е. а) Пусть в пустой клетке стоит число a. По определению среднего значения получаем

$$10 = \frac{4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 7 + 7 + a + a + a}{5 + 2 + 3},$$

$$100 = 20 + 14 + 3a,\ 66 = 3a,\ a = 22.$$

б) Размах равен $22 - 4 = 18$. Мода равна 4, ее можно было указать сразу: ведь варианта 4 встречается чаще всего.

в) Решим уравнение $15 = \dfrac{4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 7 + 7 + a + a + a}{5 + 2 + 3}$,

$$150 = 20 + 14 + 3a,\ 116 = 3a,\ a = 38\frac{2}{3} \text{ — не целое.}$$

Значит, ответ на поставленный вопрос отрицательный.

г) Решим уравнение $x = \dfrac{20 + 14 + 3a}{10}$ относительно a:

$$10x - 34 = 3a,\ a = \frac{10x - 34}{3}.$$

О т в е т: а) 22; б) 18 и 4; в) нет; г) $\dfrac{10x - 34}{3}$.

19.18. После урока по теме «Статистика» на доске осталась таблица

Варианта	4	7	11
Кратность	5	2	

и ответ: «Среднее значение = 10».

а) Заполнить пустое место в таблице.

б) Указать размах и моду распределения.

в) Можно ли пустое место в таблице заполнить так, чтобы среднее значение стало равно 5?

г) Какое ближайшее к 5 число может стоять в ответе для среднего значения?

Решение. а) Пусть в пустой клетке стоит натуральное число n. Тогда по определению среднего значения получаем:

$$10 = \frac{4 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 11 \cdot n}{5 + 2 + n},\ 10(7 + n) = 34 + 11n,\ n = 36.$$

б) Размах равен $11 - 4 = 7$. Мода равна 11, эта варианта встречается чаще всего, 36 раз.

в) Решим уравнение $5 = \dfrac{4 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 11 \cdot n}{5 + 2 + n}$,

$5 = \dfrac{34 + 11 \cdot n}{7 + n}$, $5(7 + n) = 34 + 11n$, $1 = 6n$, $n = \dfrac{1}{6}$ — не целое.

г) Составим таблицу значений для среднего $\dfrac{34 + 11n}{7 + n}$ в зависимости от n

n	1	2	3	...
$\dfrac{34 + 11n}{7 + n}$	$\dfrac{45}{8} = 5\dfrac{5}{8}$	$\dfrac{56}{9} = 6\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{67}{10} = 6{,}7$	...

Ближе всего к 5 получается ответ при $n = 1$. Тогда среднее равно $\dfrac{45}{8}$. (Конечно, можно проиллюстрировать это и с помощью графика дробно-линейной функции.)

Ответ: а) 36; б) 7 и 11; в) нет; г) $\dfrac{45}{8}$.

19.19. Таблица распределения кратностей имеет вид

Варианта	0	1	3	5	6
Кратность	19	2	$3x - 1$	5	$4x - 9$

а) Выразить через x среднее значение.

б) Как выглядит график зависимости среднего значения от x?

в) Каким может быть x, если модой является 0?

г) Может ли мода распределения равняться трем?

Решение. а) Найдем среднее значение:

$$\frac{0 \cdot 19 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (3x - 1) + 5 \cdot 5 + 6 \cdot (4x - 9)}{19 + 2 + (3x - 1) + 5 + (4x - 9)} = \frac{33x - 30}{7x + 16}.$$

б) Это часть ветви гиперболы $y = \dfrac{33x - 30}{7x + 16}$.

в) Так как $3x - 1$ и $4x - 9$ являются целыми, то и числа $3x$ и $4x$ — целые. Поэтому $x = 4x - 3x$ — также целое число. Составим таблицу:

x	1	2	3	4	5	6	7	...
$3x - 1$	2	5	8	11	14	17	$20 > 19$	...
$4x - 9$	-5	-1	3	7	11	15	19	...

Первые два столбца не подходят, так как $4x - 9 < 0$, а столбцы, начиная с седьмого, не подходят, так как $3x - 1 > 19$. Значит, подходят только случаи $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$.

г) Допустим, что 3 — мода измерения. Тогда $3x - 1 > 19$; $x > \dfrac{20}{3} = 6\dfrac{2}{3}$. Кроме того, $3x - 1 > 4x - 9$, $x < 8$. Так как x — целое число (см. решение пункта в)), то $x = 7$. Тогда $3x - 1 = 20 > 19$ и $4x - 9 = 19 < 3x - 1$.

Ответ: а) $\dfrac{33x - 30}{7x + 16}$; в) 3, 4, 5, 6; г) да, при $x = 7$.

19.20. Таблица распределения кратностей имеет вид

Варианта	0	1	3	5	6
Кратность	10	$2x$	$3x - 1$	5	$x + 5$

а) Выразить через x среднее значение.

б) Как выглядит график зависимости среднего значения от x?

в) Каким может быть целое число x, если модой является 0?

г) Может ли мода распределения равняться единице?

Решение. а) Варианта 0 встретилась 10 раз, варианта 1 встретилась $2x$ раз, варианта 3 встретилась $3x - 1$ раз, варианта 5 встретилась 5 раз и варианта 6 встретилась $x + 5$ раз. Значит, всего было получено $N = 10 + 2x + (3x - 1) + 5 + (x + 5) = 6x + 19$ данных. Найдем сумму всех данных:

$$0 \cdot 10 + 1 \cdot 2x + 3 \cdot (3x - 1) + 5 \cdot 5 + 6 \cdot (x + 5) = 17x + 52.$$

Поэтому среднее значение равно $\dfrac{17x + 52}{6x + 19}$.

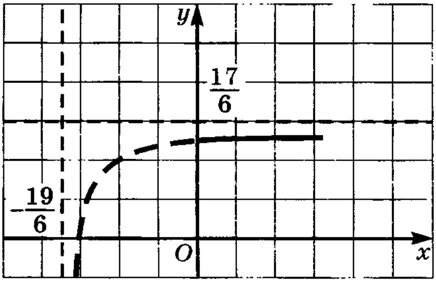


Рис. 52

б) График дробно-линейной функции — это гипербола. В данном случае ее вертикальная асимптота — это прямая $x = -\frac{19}{6}$, а горизонтальная асимптота — прямая $y = \frac{17}{6}$. Всю гиперболу можно не рисовать: ведь x по условию есть целое число (см. кратность $x + 5$) и $x \geqslant 0$ (см. кратность $2x$). Так как $\frac{52}{19} < \frac{17}{6}$, то нужная ветвь гиперболы приближается к прямой $y = \frac{17}{6}$ снизу (рис. 52).

в) По условию чаще всего (10 раз) встретилось число 0. Значит, $0 < 2x < 10$, $0 \leqslant 3x - 1 < 10$ и $0 \leqslant x + 5 < 10$, т. е. $0 \leqslant x < \frac{11}{3}$. Учитывая, что x есть целое число, получаем очень немного вариантов: $x \in \{1, 2, 3\}$.

г) Если мода равна 1, то $2x$ — самая большая из всех имеющихся кратностей, т. е. $10 < 2x$, $3x - 1 < 2x$, $5 < 2x$, $x + 5 < 2x$. Значит, $5 < x$ и $x < 1$, чего не может быть.

О т в е т: а) $\frac{17x + 52}{6x + 19}$; в) 1, 2, 3; г) нет.

20.13. Из цифр 0, 1, 4, 8, 9 случайным образом составляют двузначное число (повторения допускаются). Какова вероятность того, что получится: а) наименьшее из всех таких чисел; б) четное число; в) число, кратное 9; г) число, удаленное от 50 менее чем на 20?

Р е ш е н и е. Первую цифру можно выбрать четырьмя способами, вторую — пятью. Значит, всего из этих цифр можно составить $N = 4 \cdot 5 = 20$ двузначных чисел.

а) $m = 10$ — наименьшее из таких чисел. Есть ровно одна возможность из двадцати составить именно число 10. Поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

б) Пусть A — событие, состоящее в том, что составлено четное число. A произойдет в том и только в том случае, когда вторая цифра равна 0, 4 или 8. Поэтому $N(A) = 4 \cdot 3$ и $P(A) = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

в) Выпишем все числа, кратные 9, из 20 возможных: 18, 81, 90 и 99. Значит, $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{20} = 0{,}2$.

г) Менее чем на 20 от 50 удалены следующие двузначные числа: 31, 32, ..., 50, 51, ..., 69.

Среди них есть и те из 20 чисел, которые составлены из цифр 0, 1, 4, 8, 9. Это числа 40, 41, 44, 48, 49. Их пять. Поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{20} = 0{,}25.$

Ответ: а) 0,05; б) 0,6; в) 0,2; г) 0,25.

20.15. В квадратное уравнение $x^2 + bx + 15 = 0$ в качестве коэффициента b подставили некоторое натуральное число от 2 до 11. Найти вероятность того, что у полученного квадратного уравнения: а) будут два различных корня; б) не будет корней; в) будет хотя бы один отрицательный корень; г) будет хотя бы один положительный корень.

Решение. Всего получится 10 уравнений: $x^2 + 2x + 15 = 0, \ldots,$ $x^2 + 11x + 15 = 0$. Значит, $N = 10$.

а) $D = b^2 - 60$, $D > 0$, $b^2 > 60$. Значит, $b \in \{8, 9, 10, 11\}$. Поэтому

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

б) $D = b^2 - 60$, $D < 0$, $b^2 < 60$. Значит, $b \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$

в) Ветви параболы $y = x^2 + bx + 15$ направлены вверх, абсцисса вершины $x_{\text{вер}} = -\frac{b}{2}$ отрицательна, ось ординат пересекает параболу в точке (0; 15). Значит, если корни есть, то они отрицательны, т. е. $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$

г) Если корни данного уравнения есть, то они отрицательны (см. пункт в)), т. е. наличие положительного корня — невозможное событие. Его вероятность равна 0.

Ответ: а) 0,4; б) 0,6; в) 0,4; г) 0.

20.16. В уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в качестве радиуса R подставляют натуральное число от 1 до 20. Найти вероятность того, что: а) точка (1; 0) будет лежать на этой окружности; б) точка (0; −1) будет принадлежать кругу, который ограничен этой окружностью; в) точка (1; 3) не будет принадлежать кругу, который ограничен этой окружностью; г) эта окружность не будет пересекать прямую $y = \sqrt{123}$.

Решение. Для выбора радиуса R по условию имеется всего $N = 20$ исходов.

а) Точка (1; 0) лежит на окружности $x^2 + y^2 = R^2$, только если $1^2 + 0^2 = R^2$, т. е. только если $R = 1$. По определению вычисляем вероятность: $\frac{1}{20}$.

б) Точка (0; −1) принадлежит кругу, который ограничен окружностью $x^2 + y^2 = R^2$, только если $0^2 + (-1)^2 \leqslant R^2$. Последнее неравенство верно при всех возможных в задаче значениях R. Значит, мы имеем дело с достоверным событием.

в) Точка (1; 3) не принадлежит кругу, который ограничен окружностью $x^2 + y^2 = R^2$, только если $1^2 + 3^2 > R^2$. Последнее неравенство верно только при $R \in \{1, 2, 3\}$. По определению вычисляем вероятность: $\frac{3}{20}$.

г) Прямая не пересекает окружность, только если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности. В данном случае расстояние от начала координат до указанной прямой равно $\sqrt{123}$. Составляем неравенство $R < \sqrt{123}$. Последнее неравенство верно только при $R \in \{1, 2, \ldots, 10, 11\}$. По определению вычисляем вероятность: $\frac{11}{20}$.

Ответ: а) 0,05; б) 1; в) 0,15; г) 0,55.

20.19. Игральный кубик бросили дважды. Найти вероятность того, что: а) среди выпавших чисел есть хотя бы одна единица; б) сумма выпавших чисел не больше 3; в) сумма выпавших чисел меньше 11; г) произведение выпавших чисел меньше 25.

Решение. По правилу умножения $N = 6 \cdot 6 = 36$.

а) Пусть A — интересующее нас событие и $\bar{A}$ — противоположное ему событие. Событие $\bar{A}$ состоит в том, что единица не выпала ни в первом, ни во втором броске. Найдем $N(\bar{A})$. При первом броске возможны пять исходов: 2, 3, 4, 5, 6. При втором броске тоже возможны пять исходов: 2, 3, 4,5, 6. Поэтому $N(\bar{A}) = 5 \cdot 5 = 25$ и $N(A) = N - N(\bar{A}) = 11$. Значит, $P(A) = \frac{11}{36}$.

б) Сумма выпавших чисел не больше 3 только в следующих случаях: оба раза выпала 1; в первый раз выпала 1, а во второй — 2; и наоборот, в первый раз выпала 2, а во второй — 1.

Поэтому $N(A) = 3$ и $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

в) Пусть A — интересующее нас событие и $\bar{A}$ — противоположное ему событие. Событие $\bar{A}$ состоит в том, что сумма выпавших чисел не меньше 11. Таких случаев, как и в пункте б), ровно три:

$6 + 5 = 11$, $5 + 6 = 11$, $6 + 6 = 12$. Поэтому $N(\bar{A}) = 3$ и $N(A) = N - N(\bar{A}) = 36 - 3 = 33$.

Значит, $P(A) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.

г) Пусть A — интересующее нас событие и $\bar{A}$ — противоположное ему событие. Событие $\bar{A}$ состоит в том, что произведение выпавших чисел не меньше 25. Таких случаев ровно четыре: $5 \cdot 5 \geqslant 25$, $5 \cdot 6 > 25$, $6 \cdot 5 > 25$, $6 \cdot 6 > 25$. Значит, $P(A) = \frac{36 - 4}{36} = \frac{8}{9}$.

Ответ: а) $\frac{11}{36}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{11}{12}$; г) $\frac{8}{9}$.

20.20. Случайным образом выбирают натуральное число из промежутка [100; 200). Найти вероятность того, что: а) оно не оканчивается нулем; б) среди его цифр есть хотя бы одна цифра большая двух; в) оно не является квадратом другого целого числа; г) сумма его цифр меньше 17.

Решение. Натуральных чисел в промежутке [100; 200) ровно сто: 100, 101, 102, ..., 198, 199. Значит, $N = 100$.

а) Нулем оканчиваются 10 чисел из заданного промежутка, следовательно, <u>не</u> оканчиваются нулем 90 чисел. Поэтому $P(A) = \frac{90}{100} = 0{,}9$.

б) Пусть A — интересующее нас событие и $\bar{A}$ — противоположное ему событие. Событие $\bar{A}$ состоит в том, что вторая и третья цифры числа x — это или 0, или 1, или 2. Выпишем все такие числа: 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122. Их девять. (Можно было посчитать и по правилу умножения: $3 \cdot 3 = 9$.) Значит, $N(\bar{A}) = 9$ и $N(A) = N - N(\bar{A}) = 100 - 9 = 91$. Поэтому $P(A) = \frac{91}{100} = 0{,}91$.

в) Среди ста чисел от 100 до 199 квадратом других целых чисел являются: 100, 121, 144, 169, 196. Поэтому $P(A) = \frac{100 - 5}{100} = 0{,}95$.

г) Пусть A — интересующее нас событие и $\bar{A}$ — противоположное ему событие. Событие $\bar{A}$ состоит в том, что сумма цифр выбранного натурального числа не меньше 17. Тогда сумма двух последних его цифр не меньше 16. Выпишем все такие числа: 179, 188, 189, 197, 198, 199. Их шесть. Значит, $N(\bar{A}) = 6$ и $N(A) = N - N(\bar{A}) = 100 - 6 = 94$. Поэтому $P(A) = \frac{94}{100} = 0{,}94$.

Ответ: а) 0,9; б) 0,91; в) 0,95; г) 0,94.

21.6. а) Сколько чисел, оканчивающихся цифрой 4, находится среди первых 17 натуральных чисел? б) Какова частота чисел, оканчивающихся цифрой 4, среди первых 17 натуральных чисел? в) Заполните таблицу появления чисел, оканчивающихся цифрой 4, среди первых n натуральных чисел:

n	17	27	57	77	100	125	150	173	200	1000
Кол-во чисел, оканчивающихся на 4										
Частота										

г) К какому числу приближается частота с увеличением n?

Решение. а) Таких чисел всего два — это 4 и 14.

б) По определению частоты получаем $\frac{2}{17} \approx 0{,}118$.

в)

n	17	27	57	77	100	125	150	173	200	1000
Кол-во чисел, оканчивающихся на 4	2	3	6	8	10	13	15	17	20	100
Частота	0,118	0,111	0,105	0,104	0,1	0,104	0,1	0,098	0,1	0,1

При заполнении таблицы стоит специально отметить, что числа во второй строке примерно в 10 раз меньше соответствующих чисел в первой строке. Объяснение тут довольно простое: среди каждых десяти подряд идущих натуральных чисел есть одно число, оканчивающееся на 4.

г) Ответ 0,1 появляется как естественный вывод заполнения таблицы в пункте в) и иллюстрирует явление статистической устойчивости.

СОДЕРЖАНИЕ